

PEMANFAATAN R UNTUK KOMPUTASI SIMBOLIK

[THE UTILIZATION OF R FOR SYMBOLIC COMPUTATION]

I Gusti Agung Anom Yudistira^{1*}

¹Departemen Statistika, Universitas Bina Nusantara, Jl. K H. Syahdan No. 9, Kelurahan Kemanggisan, Kecamatan Palmerah, Jakarta Barat 11480

*Korespondensi penulis: i.yudistira@binus.ac.id

ABSTRACT

One of the R packages for symbolic operations that is currently active and developing is Ryacas. This package is an interface between the yacas system and R, combining symbolic and numerical computation capabilities in one system. This study aims to explore and document R's capabilities in symbolic computation using Ryacas. There are three topics that will be discussed in this research, namely 1) precision of arithmetic calculations, 2) application to linear algebra, and 3) application of symbolic computation to solving Mathematics-Statistics cases. Ryacas is able to increase the precision of numerical calculations in simple arithmetic cases, and operations in linear algebra. The case of obtaining the probability distribution function and probability density function of a random variable U which is a function of a random variable Y , can be easily solved by Ryacas. The output of symbolic computation from this last case is further processed numerically by R in the form of a graphical appearance, with the ggplot2 package. Likewise, the simulation process is carried out to generate the values of the random variable U . These results illustrate the continuous process between symbolic and numerical computation in one system, in this case R.

Keywords : Numerical Methods; R Programming; Ryacas; Symbolic Computation; Yacas

ABSTRAK

Paket R untuk operasi simbolik yang saat ini aktif dan berkembang salah satunya adalah Ryacas. Paket ini merupakan antarmuka antara sistem yacas dan R, sehingga menggabungkan kemampuan komputasi simbolik dan numerik dalam satu sistem. Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi dan mendokumentasikan kemampuan R dalam komputasi simbolik dengan menggunakan Ryacas. Ada tiga topik yang akan dibahas dalam penelitian ini, yaitu 1) presisi perhitungan aritmatika, 2) penerapan pada aljabar linear, dan 3) penerapan komputasi simbolik pada pemecahan kasus Matematika-Statistik. Ryacas mampu meningkatkan presisi perhitungan numerik pada kasus aritmatika sederhana, dan operasi-operasi pada aljabar linear. Kasus mendapatkan fungsi sebaran peluang dan fungsi kepekatan peluang dari peubah acak U yang merupakan fungsi dari suatu peubah acak Y , dapat dengan mudah diselesaikan oleh Ryacas. Luaran komputasi simbolik dari kasus terakhir ini, diproses lebih lanjut secara numerik oleh R berupa penampilan grafik, dengan paket ggplot2. Demikian pula proses simulasi dilakukan untuk membangkitkan nilai-nilai peubah acak U . Hasil ini mengilustrasikan proses bersinambungan antara komputasi simbolik dan numerik dalam satu sistem, dalam hal ini R.

Kata kunci : Komputasi Simbolik; Metode Numerik; Pemrograman R; Ryacas; Yacas

PENDAHULUAN

Bahasa pemrograman R, Python dan Matlab adalah bahasa pemrograman yang ditujukan untuk komputasi numerik (Bloomfield, V. A. 2018). Sedangkan untuk tujuan komputasi simbolik biasanya menggunakan perangkat lunak Maple, Mathematica (Wolfram Alpha) dan lain-lain. Dalam beberapa tugas khususnya dalam bidang sains dan teknik, sering kali dibutuhkan gabungan kedua kemampuan tersebut secara bersama-sama, baik numerik maupun simbolik dalam satu perangkat lunak. Walaupun Mathematica dan Maple juga mempunyai kemampuan untuk komputasi numerik, tetapi kenyamanan dalam penggunaan untuk komputasi numerik tentu lebih baik R, python atau matlab, disamping itu Mathematica dan Maple juga bersifat komersial, sehingga membutuhkan investasi yang besar dalam memperoleh lisensinya. Matlab sebagai perangkat numerik juga hanya tersedia untuk versi komersial (berbayar). R dan Python sebagai perangkat sumber terbuka, tersedia secara gratis baik untuk tujuan penggunaan non komersial maupun tidak. R dibandingkan dengan Python memiliki kekuatan pada komputasi statistik dan graphics (Venable W.N. 2025). Sering kali peneliti membutuhkan komputasi simbolik ditengah-tengah pekerjaan yang melibatkan operasi-operasi numerik, sehingga

perlu berpindah ke Wolfram Alpha atau Maple. Hal ini tentu akan merepotkan. Adalah ideal bila kita bekerja dalam satu perangkat lunak baik untuk operasi numerik maupun simbolik. Apabila dalam pekerjaan tersebut lebih menitik beratkan pada komputasi simbolik sedangkan komputasi numerik hanya bersifat pendukung, maka Maple dan Mathematica merupakan pilihan yang tepat. Akan tetapi kalau pekerjaan penelitian lebih fokus pada komputasi numerik, sedangkan komputasi simbolik hanya sebagai pendukung maka R menjadi pilihan. Hanya saja R untuk komputasi simbolik belum banyak mendapatkan perhatian dari peneliti. Jadi penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi dan mendokumentasikan kemampuan R dalam komputasi simbolik dengan menggunakan Ryacas.

BAHAN DAN METODE

Bahan dan Alat

Semua perintah R pada penelitian ini dijalankan menggunakan R versi 4.4.3 dengan GUI R Studio versi RStudio 2024.12.1+563 "Kousa Dogwood" Release (27771613951643d8987af2b2fb0c752081a3a853, 2025-02-02) for windows.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah Metode Eksperimen Komputasi, yang bertujuan: Mengeksplo-

rasi kemampuan R untuk melakukan komputasi simbolik dalam berbagai konteks matematika. Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

- 1) Telaah pustaka untuk mendapatkan pemahaman yang lengkap terhadap pemrograman **Yacas** dan **Ryacas**.
- 2) Menentukan fungsi-fungsi simbolik yang akan diuji, khususnya untuk topik presisi numerik, aljabar linear, dan teori statistik.
- 3) Mengimplementasikan algoritma menggunakan paket-paket R, terutama **Ryacas**.
- 4) Membangun script R.
- 5) Memeriksa dan memvalidasi hasil-nya
- 6) Melakukan analisis hasil, termasuk keakuratan dan kecepatan pemrosesan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Yacas dan Paket Ryacas pada R

Ryacas merupakan salah satu paket yang disediakan R untuk komputasi simbolik. Paket ini pertama kali diterbitkan di CRAN pada tahun 2010 dengan versi awal adalah 0.2-10 (Mazur, G., 2025). Ryacas ini memungkinkan fungsi-fungsi Yacas (*Yet Another Computer Algebra System*) dapat dijalankan di R. Yacas adalah sistem aljabar komputer dan bahasa pemrograman serbaguna yang kecil dan sangat fleksibel, dan sama seperti R bersifat *open source* (non komersial). Program yacas ini dikembangkan oleh Ayal Pinkhuis

dkk (Andersen, M.M. and Søren Højsgaard, 2023). Paket Ryacas menyediakan dua antarmuka untuk Yacas, yaitu antarmuka *Low-level* dan *High-level*. Antarmuka *Low-level* memungkinkan pengguna untuk langsung menjalankan perintah Yacas dalam bentuk string teks. Hasilnya dapat berupa string atau ekspresi R. Fungsi-fungsi utama pada antarmuka ini adalah `yac_str()` dan `yac_expr()`. Antarmuka *High-level* lebih terintegrasi dengan R, menggunakan objek seperti matriks dan vektor. Fungsi utamanya adalah `ysym()` untuk mengonversi ekspresi menjadi simbol Yacas. Disamping Ryacas, sistem R juga menyediakan paket-paket lain yang ditujukan untuk komputasi simbolik, yaitu *calculus*, *caracas*, *Deriv*, *rSymPy* dan lain-lain dengan kelebihan dan kekurangannya. Tulisan ini difokuskan pada eksplorasi paket Ryacas, beserta penerapannya pada beberapa kasus dalam topik-topik *Mathematical-Statistics* (Teori Statistika). Disamping itu Ryacas merupakan paket yang aktif dan berkembang.

Presisi Perhitungan Aritmatika pada Operasi Numerik.

Kelemahan operasi numerik adalah munculnya galat akibat proses pembulatan dan/atau pemotongan. Pada setiap langkah operasi, luaran yang diberikan adalah nilai pendekatan. Akibat dari galat ini, luaran yang diberikan bisa menyimpang jauh.

Berikut ini adalah contoh operasi numerik R yang memberikan hasil yang keliru,

```
> (0.3 - 0.2) - 0.1
[1] -2.775558e-17
> (0.3 - 0.2) - 0.1 == 0
[1] FALSE
```

Biasanya untuk mengatasi hal itu, kita menggunakan nilai eksak pada operasi aritmatika, tetapi R (juga Python) dalam proses komputasinya akan merubahnya dalam nilai pendekatan. Seperti contoh di bawah ini

```
> (1/3 - 1/5) - 2/15
[1] -2.775558e-17
> (1/3 - 1/5) - 2/15 == 0
[1] FALSE
```

Nilai eksak $1/3$ akan diaproksimasi menjadi 0.3333333 , pada nilai parameter digit default yaitu `options(digits=7)`. Nilai parameter digits terbesar yang bisa diakomodasi oleh R adalah 22, walaupun hasilnya sangat menyimpang. Seperti diperlihatkan di bawah ini.

```
> options(digits = 22)
> 1/3
[1] 0.3333333333333333148296
```

Kedua komputasi R tersebut, diperbaiki dengan komputasi simbolik oleh Ryacas sebagai berikut:

```
> library(Ryacas)
> ysym("(0.3 - 0.2) - 0.1") %>%
+   as_r() == 0
[1] TRUE

> ysym("(1/3 - 1/5) - 2/15 ") %>%
+   as_r() == 0
[1] TRUE
```

Walaupun bekerja dengan angka yang besar, hasil komputasi numerik pada R bisa

juga keliru. Misalnya kasus mencari sisa hasil bagi berikut ini,

```
> 52504222585724001 %% 10
[1] 0
```

Padahal sisa hasil bagi yang benar adalah 1. Oleh karena itu untuk mendapatkan nilai numerik yang presisi, semestinya dipertahankan tetap dalam bentuk simbolik pada proses komputasinya. Ryacas memberikan jalan keluar sebagai berikut,

```
> library(Ryacas)
> "Mod(52504222585724001, 10)" %>%
+   yac_expr() %>% eval()
[1] 1
```

Perintah yang sedikit berbeda bila kita menggunakan paket Ryacas0, tetapi hasilnya sama.

```
> library(Ryacas0)
> "Mod(52504222585724001, 10)" %>%
+   yacas() %>% as_r()
[1] 1
```

Oleh karena itu, untuk mendapatkan presisi tinggi dalam operasi aritmatika numerik, menggunakan Ryacas merupakan pilihan yang bijak. Luaran akhir dari proses komputasi ini, dikembalikan ke lingkungan sistem R.

Penerapan di Aljabar Linear

Kita akan membandingkan hasil yang diberikan oleh base R, untuk mendapatkan matrik kebalikan. Koding R base untuk mendapatkan matriks kebalikan adalah sebagai berikut:

- 1) Mendefinisikan matriks yang akan dicari kebalikannya.

```
> A <- matrix(c(1, 2, 3,
+             2, 5, 3,
+             1, 0, 8),
+           nrow = 3, byrow = TRUE)
> A
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    2    5    3
[3,]    1    0    8
```

2) Mendapatkan matriks kebalikan

```
> Ainv <- solve(A); Ainv
      [,1] [,2] [,3]
[1,]  -40   16    9
[2,]   13   -5   -3
[3,]    5   -2   -1
```

3) Memvalidasi hasil

```
> # matriks identitas 3x3
> Id <- diag(3); Id
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
> # matriks A x A invers
> A %%% Ainv
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.000000e+00 -1.776357e-15 -8.881784e-16
[2,] 3.552714e-15 1.000000e+00 -8.881784e-16
[3,] 0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00
> # validasi
> all(A %%% Ainv == Id)
[1] FALSE
```

Hasil validasi FALSE, artinya bahwa hasil penggandaan matriks A dengan A invers adalah bukan matriks identitas. Operasi yang sama akan dilakukan dengan komputasi simbolik, menggunakan paket Ryacas.

1) Mengonversi matriks A dalam bentuk simbolik

```
> library(Ryacas)
> B <- ysym(A); B
{{1, 2, 3},
 {2, 5, 3},
 {1, 0, 8}}
```

2) Mendapatkan matriks kebalikan

```
> Binv <- paste0("Inverse(", B,
+               ")") %>% yac_str()
```

```
> B * Binv
{{1, 0, 0},
 {0, 1, 0},
 {0, 0, 1}}
```

3) Memvalidasi hasil

```
> all((B * Binv) %>%
+   yac_expr() %>% eval() == Id)
[1] TRUE
```

Hasil validasi operasi matriks dengan menggunakan paket Ryacas adalah TRUE.

Mathematika-Statistika

Sistem R utamanya dibuat untuk mendukung analisis data dan statistika. R umumnya digunakan di kalangan akademisi dan mahasiswa yang mengambil subjek statistika. Sistem R yang dirancang untuk komputasi numerik, sangat mendukung komputasi dalam analisis data, tetapi saat menghadapi pemecahan masalah teori statistika (Matematika Statistika), mereka beralih pada sistem yang mendukung komputasi simbolik, seperti *Mathematica* atau *Maple*. Tersedianya Ryacas pada perangkat R, sangat membantu akademisi yang sudah terbiasa menggunakan R untuk melakukan komputasi simbolik tanpa perlu keluar dari sistem R. Di samping itu hasil pengolahan simbolik ini, dapat diproses lebih lanjut dengan komputasi numerik R, antara lain menampilkan grafik -merupakan salah satu kekuatan R- atau melakukan simulasi terhadapnya (Braun, W. J., & Murdoch, D. J. 2021). Kasus berikut ini akan memperagakan hal tersebut.

Kasus: mendapatkan sebaran peluang dari suatu fungsi peubah acak.

Kasus berikut ini diperoleh di dalam Wackaerly, D.D. (2008) pada halaman 298-299. Jika diketahui Y adalah suatu peubah acak, yang memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \dots\dots (1)$$

Peubah acak U merupakan fungsi dari Y , didefinisikan sebagai berikut, $U = 3Y - 1$. Fungsi kepekatan dari peubah acak U , diperoleh dengan menggunakan Ryacas. Tahapan-tahapan penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1). Mendapatkan hubungan antara fungsi sebaran peubah acak U dengan Y .

$$F_U(u) = P\left(Y \leq \frac{u+1}{3}\right) \dots\dots\dots (2)$$

$$P\left(Y \leq \frac{u+1}{3}\right) = \int_0^{\frac{u+1}{3}} 2y \, dy \dots\dots\dots (3)$$

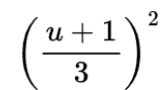
2). Mendapatkan fungsi sebaran peluang U . Koding berikut memberikan hasil integral persamaan (3), yaitu

```
> hs <- "Integrate(y,0,(u+1)/3)
+ 2*y" %>% yac_str(); hs
[1] "((u+1)/3)^2"
```

Hasilnya diubah dalam bentuk LaTeX, sebagai berikut

```
> hs %>% y_fn("TeXForm") %>% yac_str()
[1] "\\left(\\frac{u + 1}{3}\\right)^{2}"
```

LaTeX Equation editor yang digunakan untuk menampilkan hasil koding tersebut ada di <https://latexeditor.lagrida.com/>



$$\left(\frac{u+1}{3}\right)^2$$

Gambar 1. Ouput Latex Editor untuk $F_U(u)$

Sehingga fungsi sebaran peluang peubah acak U menjadi:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < -1 \\ \left(\frac{u+1}{3}\right)^2, & -1 \leq u \leq 2 \\ 1, & u > 2 \end{cases} \dots (4)$$

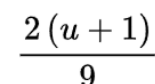
3). Mendapatkan fungsi kepekatan peluang $f_U(u)$.

Fungsi kepekatan peluang untuk U , diperoleh dari turunan fungsi sebaran $F_U(u)$ yaitu sebagai berikut:

```
> "D(u) ((u+1)/3)^2" %>% yac_str()
[1] "(2*(u+1))/9"
```

Hasilnya diubah dalam bentuk LaTeX, sebagai berikut,

```
> "D(u) ((u+1)/3)^2" %>%
+ yac_str() %>% y_fn("TeXForm") %>%
+ yac_str()
[1] "\\frac{2\\left(u + 1\\right)}{9}"
```



$$\frac{2(u+1)}{9}$$

Gambar 2. Ouput Latex Editor untuk $f_U(u)$

Sehingga fungsi kepekatan peluang untuk U adalah:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{2(u+1)}{9}, & -1 \leq u \leq 2 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \dots (5)$$

4). Membuat kurva fungsi sebaran peubah acak U , $F_U(u)$.

R memiliki kekuatan pada komputasi Grafik, salah satunya menggunakan paket ggplot2 (Sumner, J.L. 2025). Berikut ini

koding R untuk menampilkan kurva fungsi

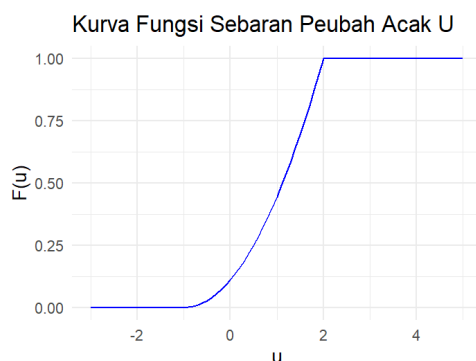
$F_U(u)$

```
> # Definisikan fungsi sebaran FU
> FU <- function(u) {
+   if (u < -1) y <- 0
+   else if (u >= -1 && u <= 2) {
+     y <- ((u + 1) / 3)^2
+   } else y <- 1
+   return(y)
+ }

> # Buat dataset
> # Opsional untuk manipulasi data
> library(dplyr)
> # Rentang nilai u
> u_values <- seq(-3, 5, by = 0.1)
> # Hitung FU(u) untuk setiap u
> data <- data.frame(u = u_values,
+   y = sapply(u_values, FU))

> library(ggplot2)
> ggplot(data, aes(x = u, y = y))+
+   geom_line(color = "blue") +
+   labs(
+     title = "Kurva Fungsi Sebaran Peubah Acak U",
+     x = "u",
+     y = "F(u)"
+   ) +
+   theme_minimal()
```

Kurva yang dihasilkan adalah:



Gambar 3. Kurva fungsi sebaran $F_U(u)$

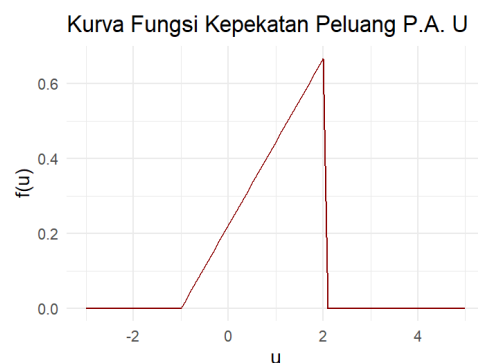
4). Membuat kurva fungsi kepekatan peluang peubah acak U , $f_U(u)$.

Langkahnya-langkahnya serupa dengan membuat fungsi sebaran $F_U(u)$. Koding

untuk fungsi kepekatan peluang (fkp) adalah sebagai berikut:

```
> # Definisikan fkp fu
> fu <- function(u) {
+   if (u >= -1 && u <= 2) {
+     y <- (2/9)*(u + 1)
+   } else y <- 0
+   return(y)
+ }
```

Kurva yang dihasilkan adalah:



Gambar 4. Kurva fungsi kepekatan $f_U(u)$

5). Simulasi pembangkitan peubah acak U . Setelah fungsi sebaran $F_U(u)$ diperoleh, maka nilai-nilai peubah acak U dapat dibangkitkan dengan metode transformasi invers (Lindyawati, T. P. at al. 2023). Ryacas dapat memperoleh fungsi invers dari fungsi $F_U(u)$, yaitu sebagai berikut:

```
> # mendefinisikan fungsi sebaran F(u)
> yac_str("F(u) := (u+1)^2 / 9")
[1] "True"

> # fungsi invers dari F(u)
> # output berupa koding LaTeX
> inv <- "Solve(F(u) == y, u)" %>%
+   yac_str() %>%
+   y_fn("TeXForm") %>%
+   yac_str(); inv

Latex editor menampilkan sebagai berikut:
```

$$\left(u = \frac{9 \left(\sqrt{\frac{4}{81} - \frac{4(\frac{1}{9}-y)}{9}} - \frac{2}{9} \right)}{2}, u = \frac{-9 \left(\frac{2}{9} + \sqrt{\frac{4}{81} - \frac{4(\frac{1}{9}-y)}{9}} \right)}{2} \right)$$

Gambar 5. Tampilan dari latex editor untuk fungsi invers dari fungsi sebaran $F_U(u)$.

Gambar 5 menunjukkan bahwa ada dua fungsi invers untuk $F_U(u)$, tetapi hanya fungsi $u(y)$ pertama yang layak -nilainya ada pada domain u -. Variabel y merupakan angka acak uniform(0, 1). Rangkaian koding berikut memberikan simulasi pembangkitan peubah acak U .

```
> # mengambil solusi yang pertama
> inv1 <- ("Solve(F(u) == y, u)"
%>% yac_str() %>% y_rmvars() %>%
yac_str() %>% as_r())[1] ; inv1
[1] "(9*(Sqrt(4/81-(4*(1/9-y))/9)-
2/9))/2"

> sim <- paste0("U := ",inv1) %>%
+ yac_expr()
> # membangkitkan 10 angka acak
> R <- runif(10)
> # hasil simulasi 10 peubahacak U
> round(sim %>% eval(list(y = R)),
4)
[1] 1.8896 -0.0346 1.8088 0.3876
[5] -0.2946 -0.0022 0.3753 1.4960
[9] 0.2473 0.7542
```

Hasil akhir dibulatkan sampai 4 tempat desimal.

KESIMPULAN

Kemampuan Ryacas sebagai sistem komputasi simbolik, memberikan manfaat besar dalam meningkatkan presisi perhitungan aritmetika maupun operasi aljabar linear. Kemampuan Ryacas juga dapat dimanfaatkan untuk penyelesaian masalah teori statistika. Sehingga para akademisi statistika mendapatkan satu alat

bermanfaat untuk berbagai keperluan, baik analisis data / statistik (komputasi numerik) atau pemeriksaan teori-teori statistika (komputasi simbolik), tanpa perlu keluar dari sistem R. Ryacas sebagai antar muka R dan yacas, akan memperluas kemampuan komputasi simbolik itu sendiri. Karena luaran-luaran Ryacas (berarti juga yacas), dapat diolah lebih lanjut dengan menggunakan paket-paket R lain, yang saat ini jumlahnya ribuan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama penulis ucapkan terima kasih kepada *The R Core Team* (<https://www.r-project.org>) dan para kontributor yang telah memelihara dan mengembangkan sistem R, sehingga menjadi maju dan semakin baik kinerjanya dari setiap versi ke versi berikutnya, serta yang terpenting R tetap non komersial. Terima kasih juga kepada teman-teman Binus dan UPH, yang mana dalam interaksi sehari-hari, dan dalam beberapa kesempatan telah memberikan pelatihan R, yang membuat penulis menjadi lebih terasah dan terampil dalam menguasai sistem R.

DAFTAR PUSTAKA

Andersen, M.M. & Søren Højsgaard (2023). *Ryacas: Getting Start*. Retrieved March 18, 2025, from <https://cloud.r-project.org/web/packages/Ryacas/vignettes/getting-started.html>

- Andrilli, S., & Hecker, D. (2022). *Elementary linear algebra*. Academic Press.
- Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.
- Bloomfield, V. A. (2018). *Using R for numerical analysis in science and engineering*. Chapman and Hall/CRC.
- Braun, W. J., & Murdoch, D. J. (2021). *A first course in statistical programming with R*. Cambridge University Press.
- Devore, J. L., Berk, K. N., & Carlton, M. A. (2021). *Modern mathematical statistics with applications*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-55156-8>
- Douglas, A., Roos, D., Mancini, F., Couto, A., & Lusseau, D. (2022). *An introduction to R*. URL <https://intro2r.com>.
- Hirsch, R. (2023). Introduction to R. In *Analysis of Epidemiologic Data Using R* (pp. 1-12). Cham: Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-41914-0_1
- Lindyawati, T. P., Arumsari, N., & Sa'diyah, A. (2023). Perbandingan Model Peluang Kegagalan Pada Sistem Pendingin Main Engine Crew Boat 41 GT. In *Proceedings Conference on Marine Engineering and its Application* (Vol. 6, No. 1).
- Mazur, G. (2025). *Ryacas to yacas interfase*. Retrieved March 27, 2025, from <https://grzegorz mazur.github.io/ryacas/>
- Sumner, J. L. (2025). Visualizing Data with ggplot2. In *R for Political Science Research: An Introduction for Absolute Beginners* (pp. 237-265). Cham: Springer Nature Switzerland.
- https://doi.org/10.1007/978-3-031-75853-9_12
- Venables, W.N, D. M. Smith & the R Core Team (2024). *An Introduction to R Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics* (Version 4.4.3). <https://cran.r-project.org/doc/manuals/r-release/R-intro.pdf>
- Villanueva, R. A. M., & Chen, Z. J. (2019). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. <https://doi.org/10.1080/15366367.2019.1565254>
- Wackerly, D. D. (2008). *Mathematical statistics with applications*. Thomson Brooks/Cole.