

PEMODELAN FREKUENSI DAN SIMULASI GETARAN SENAR GITAR BASS LISTRIK DAN GITAR AKUSTIK

[FREQUENCY MODELING AND VIBRATION SIMULATION OF ELECTRIC BASS AND ACOUSTIC GUITAR STRINGS]

Caroline Gunawan¹, Helena Margaretha², Lina Cahyadi^{3*}, Petrus Widjaja⁴
^{1,2,3,4}Program Studi Matematika, Universitas Pelita Harapan, Tangerang, Indonesia

*Korespondensi penulis: lina.cahyadi@uph.edu

ABSTRACT

Mathematical equations can represent numerous real-world scenarios, a process known as mathematical modelling. Within this paper, we undertake modelling two musical instruments, specifically the electric bass guitar and the acoustic guitar. Our approach uses partial differential equations (PDEs) to represent these instruments accurately. By establishing the initial condition, we derive the final solution and simulate the frequency using parameters obtained from this solution alongside a frequency formula. The PDE for the electric bass guitar is of non-homogeneous second order, while the PDE for the acoustic guitar is of homogeneous fourth order. The simulation outcomes demonstrate that a lower vibration frequency for the electric bass guitar corresponds to a decreased string density, given a fixed tension. Similarly, this correlation holds for the acoustic guitar. With fixed string tension and Young's Modulus, a lower string density leads to a higher frequency and reduced inertia. Additionally, we provide graphical representations of the analytical solutions for both PDEs.

Keywords: acoustic guitar; electric bass guitar; frequency simulation; partial differential equation

ABSTRAK

Persamaan matematika dapat memodelkan banyak situasi dalam dunia nyata. Proses ini disebut pemodelan matematika. Salah satu contoh yang dapat dimodelkan adalah frekuensi alat musik (gitar bass listrik dan gitar akustik). Kedua alat musik tersebut dimodelkan frekuensinya dengan persamaan diferensial parsial (PDP). Solusi akhir akan diperoleh berdasarkan kondisi awal. Simulasi frekuensi dilakukan berdasarkan parameter yang ditemukan dari solusi akhir dan rumus frekuensi. PDP untuk gitar bass listrik adalah orde dua non-homogen, dan PDP untuk gitar akustik adalah orde empat homogen. Hasil simulasi menunjukkan bahwa untuk gitar bass dengan tegangan tertentu, senar dengan densitas rendah menghasilkan frekuensi getaran yang lebih rendah. Hasil yang konsisten juga ditunjukkan untuk gitar akustik. Pada tegangan senar dan Modulus Young yang diberikan, senar dengan densitas rendah menghasilkan frekuensi yang lebih tinggi dan inersia yang lebih rendah. Beberapa grafik solusi analitik dari kedua PDP tersebut juga ditampilkan dalam artikel ini.

Kata kunci: gitar akustik; gitar bass elektrik; persamaan diferensial parsial; simulasi frekuensi

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan bentuk deskripsi matematis yang digunakan untuk menggambarkan suatu kejadian, misalnya getaran pada berbagai alat music (Wijnand *et al.*, 2020; Kusumastuti *etal.*, 2019; Vinod Kumar & Ganguli, 2011). Dalam pembahasan ini, pemodelan yang dipakai dengan menggunakan persamaan diferensial parsial (PDP) untuk gitar *bass* elektrik (Lambson, 2018) dan gitar akustik (Kobayashi, *et. al.*, 2010; Strauss, 2008).

Dalam artikel ini dipaparkan pengaruh dari parameter-parameter dalam persamaan masing-masing gitar akustik dan gitar *bass* elektrik terhadap frekuensi (f), yaitu tegangan (τ), massa jenis (ρ), inersia (I), amplitudo (α_1 dan α_2 untuk gitar *bass* elektrik, σ_1 dan σ_2 untuk gitar akustik), dan Modulus Young (E). Selain itu, dipaparkan juga model untuk frekuensi gitar akustik dan gitar *bass* elektrik yang diperoleh dari solusi analitik, syarat awal yang terbaik untuk pemodelan frekuensi gitar akustik dan gitar *bass* elektrik.

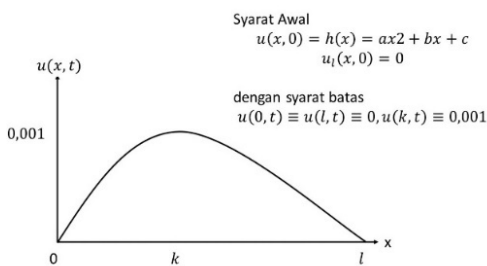
Batasan-batasan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: jenis dan tegangan pada senar konstan ($\rho(x) = \rho$ dan $\tau(x) = \tau$), senar tidak teredam (*undamped*) pada semua alat musik, posisi petik pada $x = k$ konstan, tegangan (τ) diukur dalam satuan

kilogram, senar gitar terbuat dari perunggu dengan Modulus Young (E) sebesar 96 *GPa*, rumus inersia untuk setiap senar gitar adalah $I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{2} ML^2$, dengan M adalah massa senar, R adalah jari-jari senar (m), L adalah panjang senar dalam (m).

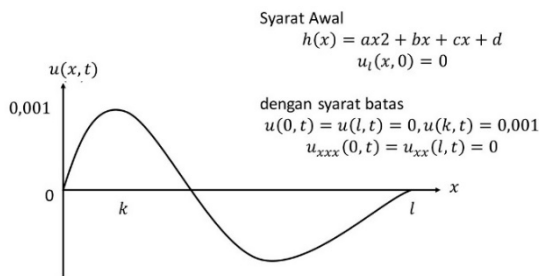
Dari rujukan-rujukan yang ada, telah ditemukan kedua pemodelan untuk gitar *bass* elektrik dan gitar akustik, yaitu PDP orde dua nonhomogen untuk gitar *bass* elektrik dan PDP orde 4 homogen untuk gitar akustik. Namun, dari rujukan-rujukan tersebut hanya ditemukan model persamaan yang masih perlu pengembangan lebih lanjut mengenai frekuensi dan perubahan parameternya, beserta beberapa grafik pendekatan yang digunakan untuk syarat awal pada penelitian ini (Arfken *et al.*, 2013, Brown & Churchill, 2009; Anton & Rorres, 2005).

Grafik syarat awal dan pemodelan gitar dipaparkan dalam Gambar 1-5. Pemodelan pada gitar *bass* elektrik dan gitar akustik untuk syarat awal kuadrat digunakan parameter a , b , dan c untuk menentukan bentuk grafik kuadratnya. Gambar 3 merupakan grafik untuk syarat awal distribusi beta dengan parameter α , β , dan c untuk menentukan bentuk grafik distribusi beta. Grafik ini berguna untuk membandingkan dengan syarat awal kuadrat dan kubik.

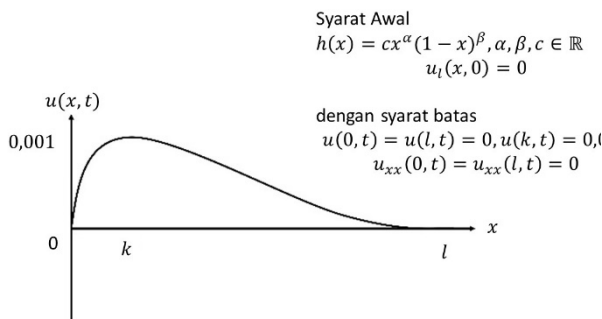
Struktur untuk pemodelan gitar *bass* elektrik dan gitar akustik dapat dilihat pada Gambar 4. Pada Gambar 4, struktur gitar *bass* elektrik, terdapat x adalah posisi pada senar, u adalah amplitudo sebuah senar, l adalah posisi jari untuk menekan senar, k adalah posisi memetik senar, dan $0 < k < l$, di mana $k, l \in \mathbb{R}$.



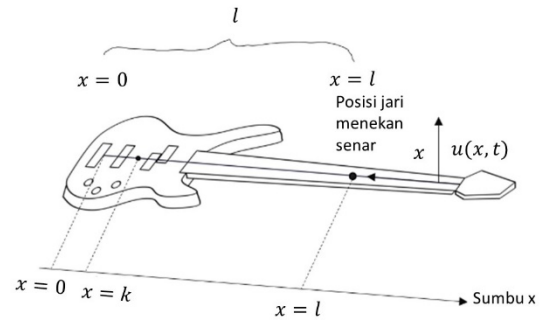
Gambar 1. Grafik syarat awal kuadrat dan syarat batas untuk gitar *bass* elektrik dan gitar kustik



Gambar 2. Grafik syarat awal kubik dan syarat batas untuk gitar *bass* elektrik dan gitar akustik

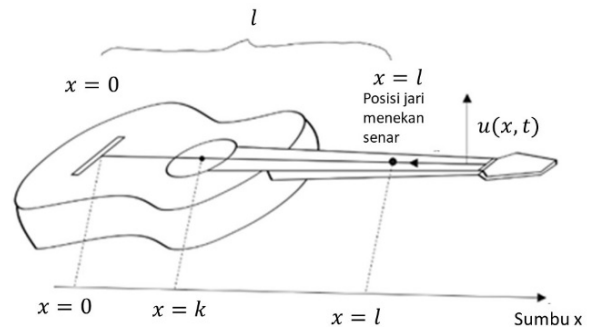


Gambar 3. Syarat awal beta dan syarat batas pada gitar *bass* elektrik dan gitar akustik



Gambar 4. Pemodelan pada gitar *bass* elektrik

Gambar struktur pada gitar akustik juga memiliki struktur yang sama seperti gitar *bass* elektrik. Gambar 5 adalah gambar struktur pada gitar akustik.



Gambar 5. Pemodelan pada gitar akustik

Pada penelitian ini, pemodelan frekuensi gitar *bass* elektrik dan gitar akustik dikembangkan dengan mencari solusi masing-masing PDP yang dipaparkan proses pencarian solusi dengan lebih terperinci, dilanjutkan dengan simulasi parameter-parameter PDP pada masing-masing alat musik yang kemudian dimunculkan pemodelan frekuensi gitar *bass* elektrik dan gitar akustik. Tidak hanya itu, penelitian ini juga menggunakan beberapa syarat awal untuk menentukan pemodelan yang terbaik untuk frekuensi gitar *bass* elektrik dan gitar akustik

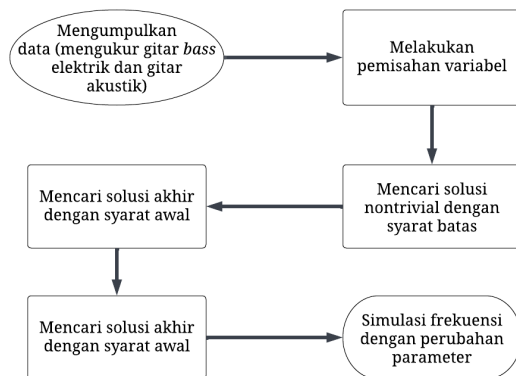
BAHAN DAN METODE

Bahan dan Alat

Alat yang digunakan adalah gitar *bass* elektrik dan gitar akustik.

Metode Penelitian

Gambaran langkah penelitian yang digunakan dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 6. Flowchart penelitian

Langkah pertama hingga kelima pada Gambar 6 merupakan langkah-langkah penyelesaian PDP pada gitar *bass* elektrik maupun gitar akustik, sementara simulasi frekuensi merupakan tahap akhir untuk penelitian terhadap parameter-parameter yang terdapat pada gitar *bass* elektrik dan gitar akustik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyelesaian PDP Gitar *Bass* Elektrik

PDP gitar *bass* elektrik (Harmonic Motion, 2022; Kobayashi, 2010)

$$\tau \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + f(x, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \quad (1)$$

dengan syarat awal

$$u(x, 0) = h(x)ax^2 + bx + c$$

$$\text{dan } u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

dengan

1. x = posisi pada senar dengan $0 < x < l$,
2. u = amplitudo senar,

dan syarat batas

$$u(0, t) = 0 \text{ dan } u(l, t) = 0. \quad (3)$$

dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel, dengan kombinasi liniernya dari fungsi berikut

$$u_n(x, t) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}n\pi}{l}t\right), \quad (4)$$

dan solusi akhirnya adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}n\pi}{l}t\right). \quad (5)$$

Dari solusi akhir PDP yang telah didapatkan, pemodelan frekuensi untuk gitar *bass* elektrik adalah

$$f_n = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}n}{1,73}. \quad (6)$$

Terdapat tiga syarat awal yang digunakan untuk penyelesaian PDP gitar *bass* elektrik, yaitu syarat awal kuadrat dengan bentuk

$$h(x) = ax^2 + bx + c, \quad (7)$$

syarat awal kubik dengan bentuk

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (8)$$

syarat awal distribusi beta dengan bentuk

$$h(x) = cx^\alpha(l-x)^\beta. \quad (9)$$

Dari ketiga syarat awal di atas, ditentukan solusi PDP pada gitar *bass* elektrik dengan syarat awal kuadrat dengan menentukan nilai a , b , dan c dengan $k = 0,095$ dan $l = 0,865$, menggunakan $h(0)$ untuk mencari koefisien c , dengan $c = 0$. Maka dari itu, $h(x)$ yang akan digunakan untuk mencari nilai a dan b adalah

$$h(x) = ax^2 + bx. \quad (10)$$

Kemudian dimasukkan $h(k) = 0,001$ dan $h(l) = 0$ pada persamaan di atas, dan diselesaikan dengan sistem persamaan linier (SPL) dengan $a = -\frac{20}{1.463}$ dan $b = \frac{173}{14.630}$. Maka dari itu, solusi akhir untuk PDP gitar *bass* elektrik dengan syarat awal kuadrat adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{0,865} x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} n\pi}{0,865} t\right), \quad (11)$$

dengan

$$\alpha_n = \frac{2}{0,865} \int_0^{\infty} \left(-\frac{20}{1.463} x^2 + \frac{173}{14.630} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{0,865} x\right) dx. \quad (12)$$

Untuk syarat awal kubik, cara yang digunakan sama seperti syarat awal kuadrat tetapi digunakan persamaan

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (13)$$

dengan nilai $a = 0,1261464729$, $b = -0,1347711539$, $c = 0,221911035$ dan $d = 0$, yang didapat dari $h(k) = 0,001$, $h'(k) = 0$ yang didefinisikan sebagai titik puncak pada grafik kubik, dan $h(l) = 0$, dengan menggunakan SPL, solusi akhir untuk PDP gitar *bass* elektrik dengan syarat awal kubik adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} n\pi}{l} t\right), \quad (14)$$

dengan

$$\alpha_n = \frac{2}{0,865} \int_0^{\infty} (0,1261464729x^3 - 0,1347711539x^2 + 0,221911035x) \sin\left(\frac{n\pi}{0,865} x\right) dx. \quad (15)$$

Untuk syarat awal distribusi beta, dicari β dan c menggunakan program *Maple* dengan memilih $\alpha = 0,3$ sehingga

$$h(x) = cx^{\alpha}(l-x)^{\beta} \quad (16)$$

dengan $h(k) = 0,001$ dan $h(l) = 0$. Selain itu, terdapat satu syarat untuk menentukan apakah nilai α yang dipilih tersebut layak dengan $h''(k) < 0$. Dari syarat tersebut, nilai α yang dipilih layak sehingga dengan *Maple* didapatkan $\beta = 2,431578948$ dan $c = 0,003825512995$. Maka dari itu, solusi PDP gitar *bass* elektrik dengan syarat awal distribusi beta adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{0,865} x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} n\pi}{0,865} t\right), \quad (17)$$

dengan

$$\alpha_n = \frac{2}{0,865} \int_0^{\infty} (0,003825512995x^{0,3} (0,865 - x)^{2,431578948}) \sin\left(\frac{n\pi}{0,865} x\right) dx. \quad (18)$$

Simulasi Frekuensi Gitar Bass Elektrik

Amplitudo tertinggi yang dihasilkan oleh gitar bass elektrik dengan syarat awal persamaan kuadrat adalah pada $n = 1$, dengan hasil dari

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{0,865} \int_0^{\infty} \left(-\frac{20}{1.463} x^2 + \frac{173}{14.630} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{0,865} x\right) dx \quad (19)$$

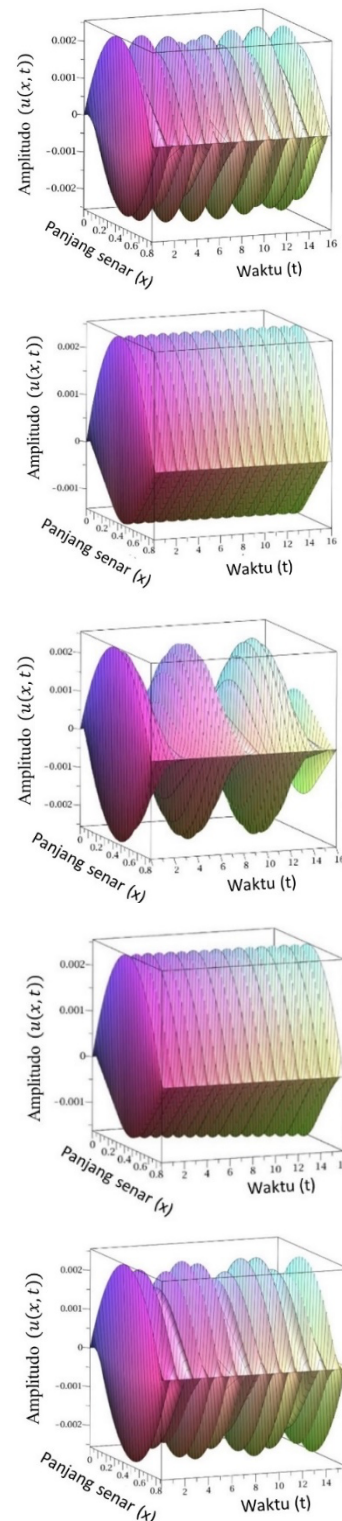
konvergen menuju 0. Simulasi frekuensi gitar bass elektrik dengan syarat awal persamaan kuadrat ada pada Tabel 1. Untuk syarat awal persamaan kuadrat, gitar bass memiliki amplitudo tertinggi sebesar 0,002639114624 m.

Tabel 1. Simulasi frekuensi berdasarkan parameter tegangan (τ), amplitudo maksimum (α_1), dan massa jenis (ρ) pada alat musik gitar bass elektrik

Senar	$f(\text{Hz})$	$\tau(\text{kg})$	$\rho\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	$\alpha_1(\text{m})$
1	97,999	20,4116	0,000710	0,002639
2	73,416	19,1869	0,001829	0,002639
3	55,000	20,4570	0,002259	0,002639
4	41,203	17,1911	0,003383	0,002639
5	30,868	15,7396	0,005519	0,002639

Gambar 7 adalah grafik pergerakan amplitudo pada gitar bass elektrik dengan

syarat awal persamaan kuadrat masing-masing senar.



Gambar 7. Pergerakan amplitudo pada senar 1-5 untuk gitar bass elektrik

Pada Gambar 7, terlihat bahwa semakin tinggi frekuensi sebuah senar, semakin rendah massa jenis senar yang dimiliki, semakin renggang juga amplop gelombang yang dimiliki pada suatu senar. Senar pertama memiliki amplop gelombang yang paling rapat dan senar kelima memiliki amplop gelombang yang paling renggang. Amplitudo tertinggi yang dihasilkan oleh gitar *bass* elektrik dengan syarat awal persamaan kubik adalah pada $n = 2$, dengan hasil

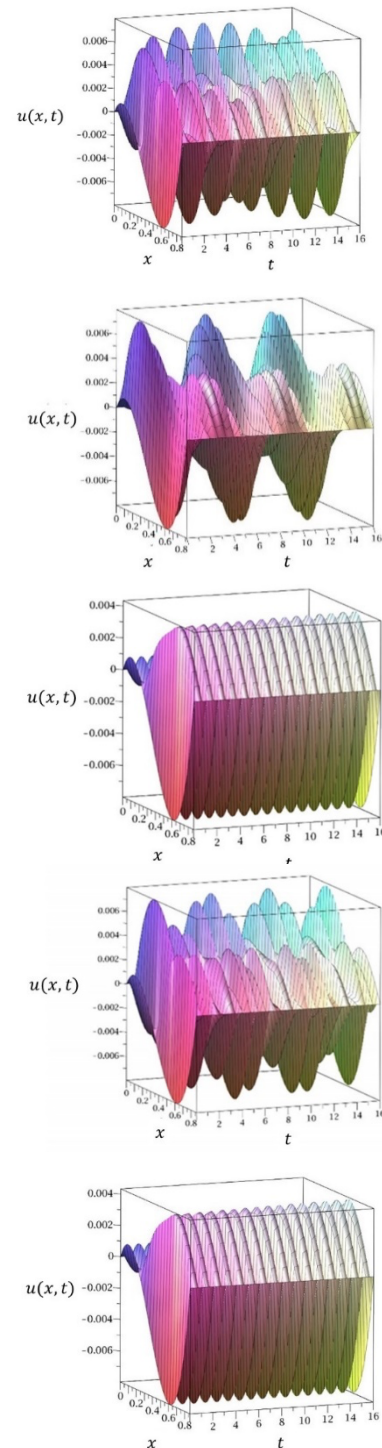
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{0,865} \int_0^{\infty} (0,1261464729x^3 - 0,1347711539x^2 + 0,221911035x) \sin\left(\frac{n\pi}{0,865}x\right) dx \quad (20)$$

konvergen menuju 0. Maka dari itu, berikut adalah tabel simulasi frekuensi gitar *bass* elektrik dengan syarat awal persamaan kubik pada Tabel 2. Untuk syarat awal persamaan kubik, gitar *bass* elektrik memiliki amplitudo tertinggi sebesar 0,003949708762 m.

Tabel 2. Tabel simulasi frekuensi berdasarkan parameter tegangan (τ), amplitudo maksimum (α_2), dan massa jenis (ρ) dengan syarat awal persamaan kubik pada alat musik gitar *bass* elektrik

Senar	$f(\text{Hz})$	$\tau(\text{kg})$	$\rho\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	$\alpha_1(\text{m})$
1	97,999	20,4116	0,000710	0,0039497
2	73,416	19,1869	0,001189	0,0039497
3	55,000	20,4570	0,002259	0,0039497
4	41,203	17,1911	0,003383	0,0039497
5	30,868	15,7396	0,005519	0,0039497

Gambar 8 adalah grafik pergerakan amplitudo pada gitar *bass* elektrik dengan syarat awal persamaan kubik masing-masing senar.



Gambar 8. Grafik senar untuk gitar *bass* elektrik dengan syarat awal persamaan kubik

Pada Gambar 8, terlihat bahwa semakin tinggi frekuensi sebuah senar, semakin rendah massa jenis senar yang dimiliki, semakin renggang juga amplop gelombang yang dimiliki pada suatu senar. Senar pertama memiliki amplop gelombang yang paling rapat dan senar kelima memiliki amplop gelombang yang paling renggang. Amplitudo tertinggi yang dihasilkan oleh gitar *bass* elektrik dengan syarat awal distribusi beta adalah pada $n = 1$, dengan hasil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{0,865} \int_0^{\infty} (0,003825512995x^{0,3} (0,865 - x)^{2,431578948}) \sin\left(\frac{n\pi}{0,865}x\right) dx \quad (21)$$

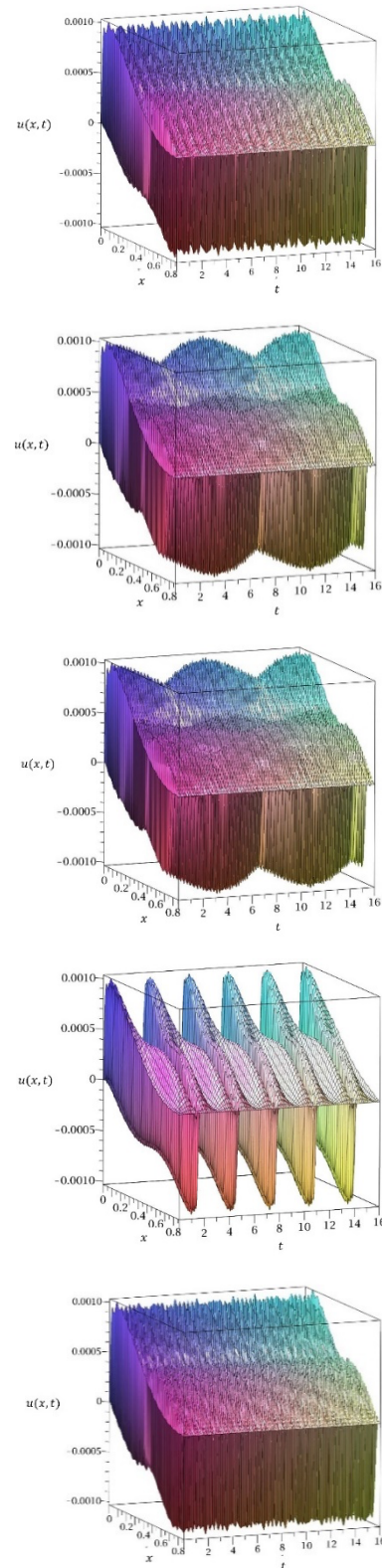
konvergen menuju 0. simulasi frekuensi gitar *bass* elektrik dengan syarat awal distribusi beta dapat dilihat pada Tabel 3. Untuk syarat awal distribusi beta, gitar *bass* elektrik memiliki amplitudo tertinggi sebesar 0,0005522689162 m .

Tabel 3. Tabel simulasi frekuensi berdasarkan parameter tegangan (τ), amplitudo maksimum (α_1), dan massa jenis (ρ) dengan syarat awal distribusi beta pada alat musik gitar *bass* elektrik

Senar	$f(Hz)$	$\tau(kg)$	$\rho(\frac{kg}{m^3})$	$\alpha_1(m)$
1	97,999	20,4116	0,000710	0,0005522
2	73,416	19,1869	0,001189	0,0005522
3	55,000	20,4570	0,002259	0,0005522
4	41,203	17,1911	0,003383	0,0005522
5	30,868	15,7396	0,005519	0,0005522

Gambar 9 adalah grafik pergerakan amplitudo pada gitar *bass*

elektrik dengan syarat awal distribusi beta masing-masing senar.



Gambar 9. Grafik senar untuk gitar *bass* elektrik dengan syarat awal distribusi beta

Pada Gambar 9, terlihat bahwa semakin tinggi frekuensi sebuah senar, semakin rendah massa jenis senar yang dimiliki, semakin renggang juga amplop gelombang yang dimiliki pada suatu senar. Senar pertama memiliki amplop gelombang yang paling rapat dan senar kelima memiliki amplop gelombang yang paling renggang.

Penyelesaian PDP Gitar Akustik

PDP gitar akustik (Lambson, 2018)

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) - \tau \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = 0 \quad (22)$$

dengan syarat awal $(x, 0) = h(x)$ dan $u_t(x, 0) = 0$, dan syarat batas $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u_{tt}(0, t) = 0$ dan $u_{tt}(l, t) = 0$, yang dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel, dengan hasil pemisahan variabelnya untuk $X(x)$ adalah

$$EIX'''' - \tau X'' = \lambda X, \quad (23)$$

dan untuk $T(t)$ adalah

$$-\rho T'' = \lambda T. \quad (24)$$

PDP ini diselesaikan dengan tiga kasus, yaitu kasus pertama ($\lambda = 0$), kasus kedua ($\lambda > 0$), dan kasus ketiga ($\lambda < 0$). Untuk kasus pertama, persamaan karakteristik yang didapatkan adalah

$$EI r^4 - \tau r^2 = 0 \quad (25)$$

dan didapatkan solusi umumnya adalah

$$X(x) = c_1 e^{\frac{\tau}{EI} x} + c_2 e^{-\frac{\tau}{EI} x}. \quad (26)$$

Kemudian dimasukkan syarat batas pada persamaan karakteristik tersebut, solusi yang didapatkan adalah trivial.

Solusi nontrivial didapatkan dari kasus kedua ($\lambda > 0$), dengan persamaan karakteristik

$$EI r^4 - \tau r^2 - \beta^2 = 0, \quad (27)$$

dengan

$$r_1 = \sqrt{\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 + 4EI\beta^2}}{2EI}}, \quad r_2 = -\sqrt{\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 + 4EI\beta^2}}{2EI}},$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 + 4EI\beta^2}}{2EI}}, \quad r_4 = -\sqrt{\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 + 4EI\beta^2}}{2EI}},$$

dengan $\tau - \sqrt{\tau^2 + 4EI\beta^2} = -\kappa$,

nilai r_3 dan r_4 menjadi $r_3 = \frac{\kappa}{2EI} i$ dan

$r_4 = -\frac{\kappa}{2EI} i$, dengan solusi umum

$$X(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{-r_1 x} + c_3 \cos\left(\frac{\kappa}{2EI} x\right) + c_4 \sin\left(\frac{\kappa}{2EI} x\right) \quad (28)$$

dan

$$X''(x) = r_1^2 c_1 e^{r_1 x} + r_1^2 c_2 e^{-r_1 x} - \left(\frac{\kappa}{2EI}\right)^2 c_3 \cos\left(\frac{\kappa}{2EI} x\right) - \left(\frac{\kappa}{2EI}\right)^2 c_4 \sin\left(\frac{\kappa}{2EI} x\right) \quad (29)$$

Bila dimasukkan syarat batasnya dan diselesaikan dengan SPL, solusi untuk $X(x)$ adalah

$$X_n(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (30)$$

solusi $T(t)$ adalah

$$T_n(t) = c_1 \cos\left(\beta \sqrt{\frac{1}{\rho}} t\right) + c_2 \sin\left(\beta \sqrt{\frac{1}{\rho}} t\right) \quad (31)$$

kombinasi liniernya adalah

$$u_n(x, t) = \sigma_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{1}{l} \sqrt{\frac{n\pi(EIn\pi + \tau l)}{\rho}} t\right), \quad (32)$$

dan solusi akhirnya adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{1}{l} \sqrt{\frac{n\pi(EIn\pi + \tau l)}{\rho}} t\right). \quad (33)$$

Pada kasus ketiga, dengan membagi kasus lagi, yaitu $z > 0$ dan $z < 0$, dengan persamaan karakteristik

$$Elr^4 - \tau r^2 + \beta^2 = 0,$$

$$\text{dengan } r_1 = \sqrt{\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4EI\beta^2}}{2EI}},$$

$$r_2 = -\sqrt{\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4EI\beta^2}}{2EI}}, \quad r_3 = \sqrt{\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4EI\beta^2}}{2EI}},$$

$$\text{dan } r_4 = -\sqrt{\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4EI\beta^2}}{2EI}}, \text{ dengan}$$

$$\tau^2 - 4EI\beta^2 = z. \quad (34)$$

dan solusi umumnya adalah

$$X(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} + c_4 e^{-r_4 x} \quad (35)$$

dan

$$X''(x) = r_1^2 c_1 e^{r_1 x} + r_2^2 c_2 e^{r_2 x} + r_3^2 c_3 e^{r_3 x} + r_4^2 c_4 e^{-r_4 x}. \quad (36)$$

Bila dimasukkan syarat batas pada solusi umum dan diselesaikan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, solusi untuk kasus ketiga trivial.

Dari solusi PDP yang telah didapatkan dari kasus kedua, pemodelan frekuensi untuk gitar akustik adalah

$$f_n = \frac{1}{1,3\pi} \sqrt{\frac{n\pi(EIn\pi + \tau 0,65)}{\rho}}. \quad (37)$$

Terdapat tiga syarat awal yang digunakan untuk penyelesaian PDP gitar akustik, yaitu syarat awal kuadrat dengan bentuk

$$h(x) = ax^2 + bx + c, \quad (38)$$

syarat awal kubik dengan bentuk

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (39)$$

dan syarat awal distribusi beta berbentuk

$$h(x) = cx^\alpha(l - x)^\beta. \quad (40)$$

Dari ketiga syarat awal di atas, ditentukan solusi PDP pada gitar *bass* elektrik dengan syarat awal kuadrat dengan menentukan nilai a , b , dan c dengan $k = 0,15$ dan $l = 0,65$, menggunakan $h(0)$ untuk mencari koefisien c , dengan $c = 0$. Maka dari itu, $h(x)$ yang digunakan untuk mencari nilai a dan b adalah

$$h(x) = ax^2 + bx. \quad (41)$$

Kemudian akan dimasukkan $h(k) = 0,001$ dan $h(l) = 0$ pada persamaan di atas, dan diselesaikan dengan sistem persamaan linier (SPL) dengan $a = -\frac{1}{75}$ dan $b = \frac{13}{1.500}$. Maka dari itu, solusi akhir untuk PDP gitar akustik dengan syarat awal kuadrat adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sin\left(\frac{n\pi}{0,65}x\right) \cos\left(\frac{1}{0,65} \sqrt{\frac{n\pi(EIn\pi + \tau 0,65)}{\rho}} t\right), \quad (42)$$

dengan

$$\sigma_n = \frac{2}{0,65} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{75} x^2 + \frac{13}{1.500} x \right) \sin\left(\frac{n\pi}{0,65} x\right) dx. \quad (43)$$

Untuk syarat awal kubik, cara yang digunakan sama seperti syarat awal kuadrat tetapi persamaan yang digunakan:

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (44)$$

dengan nilai $a = \frac{14}{225}$, $b = -\frac{71}{1.125}$, $c = \frac{21}{1.500}$ dan $d = 0$, yang didapat dari $h(k) = 0,001$, $h'(k) = 0$ yang didefinisikan sebagai titik puncak pada grafik kubik, dan $h(l) = 0$, dengan menggunakan SPL, solusi akhir untuk PDP gitar akustik dengan syarat awal kubik adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sin\left(\frac{n\pi}{0,65} x\right) \cos\left(\frac{1}{0,65} \sqrt{\frac{n\pi(Eln\pi + \tau 0,65)}{\rho}} t\right), \quad (45)$$

dengan

$$\sigma_n = \frac{2}{0,65} \int_0^\infty \left(\frac{14}{225} x^3 - \frac{71}{1.125} x^2 + \frac{21}{1.500} x \right) \sin\left(\frac{n\pi}{0,65} x\right) dx. \quad (46)$$

Untuk syarat awal distribusi beta, dicari β dan c menggunakan program *Maple* dengan memilih $\alpha = 2$ dan menggunakan

$$h(x) = cx^\alpha(l-x)^\beta \quad (47)$$

dengan $h(k) = 0,001$ dan $h(l) = 0$. Selain itu, terdapat satu syarat untuk menentukan

apakah nilai α yang dipilih tersebut layak dengan $h''(k) < 0$.

Dari syarat tersebut, nilai α yang dipilih layak sehingga dengan *Maple* didapatkan $\beta = \frac{20}{3}$ dan $c = 4,515274103$. Maka dari itu, solusi PDP gitar akustik dengan syarat awal distribusi beta adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sin\left(\frac{n\pi}{0,65} x\right) \cos\left(\frac{1}{0,65} \sqrt{\frac{n\pi(Eln\pi + \tau 0,65)}{\rho}} t\right), \quad (48)$$

dengan

$$\sigma_n = \frac{2}{0,65} \int_0^\infty (4,515274103 x^2 (0,65 - x)^{\frac{20}{3}}) \sin\left(\frac{n\pi}{0,65} x\right) dx. \quad (49)$$

Simulasi Frekuensi Gitar Akustik

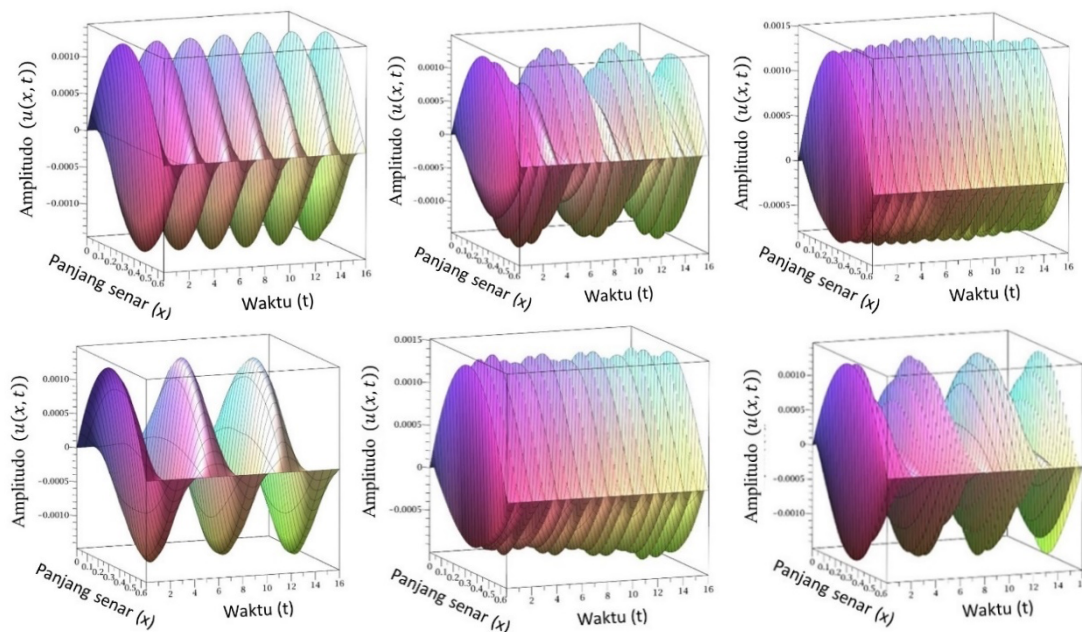
Amplitudo tertinggi yang dihasilkan oleh gitar akustik dengan syarat awal persamaan kuadrat adalah pada $n = 1$, dengan hasil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{0,65} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{75} x^2 + \frac{13}{1.500} x \right) \sin\left(\frac{n\pi}{0,65} x\right) dx \quad (50)$$

konvergen menuju 0. Simulasi frekuensi gitar akustik dengan syarat awal persamaan kuadrat ada pada Tabel 4. Untuk syarat awal persamaan kuadrat, gitar akustik memiliki amplitudo tertinggi sebesar 0,001453469152 m. Gambar 10 adalah grafik pergerakan amplitudo pada gitar akustik dengan syarat awal persamaan kuadrat masing-masing senar.

Tabel 4. Simulasi frekuensi berdasarkan parameter tegangan (τ), amplitudo maksimum (σ_1), massa jenis (ρ), inersia (I), dan Modulus Young (E) pada alat musik gitar akustik

Senar	$f(\text{Hz})$	$\tau(\text{kg})$	$\rho(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})$	$I(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2})$	$E(\text{GPa})$	$\sigma_1(\text{m})$
1	329,628	11,748042382	0,0000132424	0,0000101470	96	0,001453469152
2	246,942	11,702683146	0,0000235073	0,0000133756	96	0,001453469152
3	195,998	14,242800418	0,0000454254	0,0000232921	96	0,001453469152
4	146,832	14,378878129	0,0000817851	0,0000509659	96	0,001453469152
5	110,000	13,879926522	0,0001408377	0,0000855582	96	0,001453469152
6	82,407	13,199537967	0,0002389456	0,0001176138	96	0,001453469152



Gambar 10. Grafik senar untuk gitar akustik

Pada Gambar 10, terlihat bahwa semakin tinggi frekuensi sebuah senar, semakin rendah massa jenis senar yang dimiliki, semakin renggang juga amplop gelombang yang dimiliki pada suatu senar. Senar pertama memiliki amplop gelombang yang paling rapat dan senar keenam memiliki amplop gelombang yang paling renggang.

Amplitudo tertinggi yang dihasilkan oleh gitar akustik dengan syarat awal persamaan kubik adalah pada $n = 2$, dengan hasil

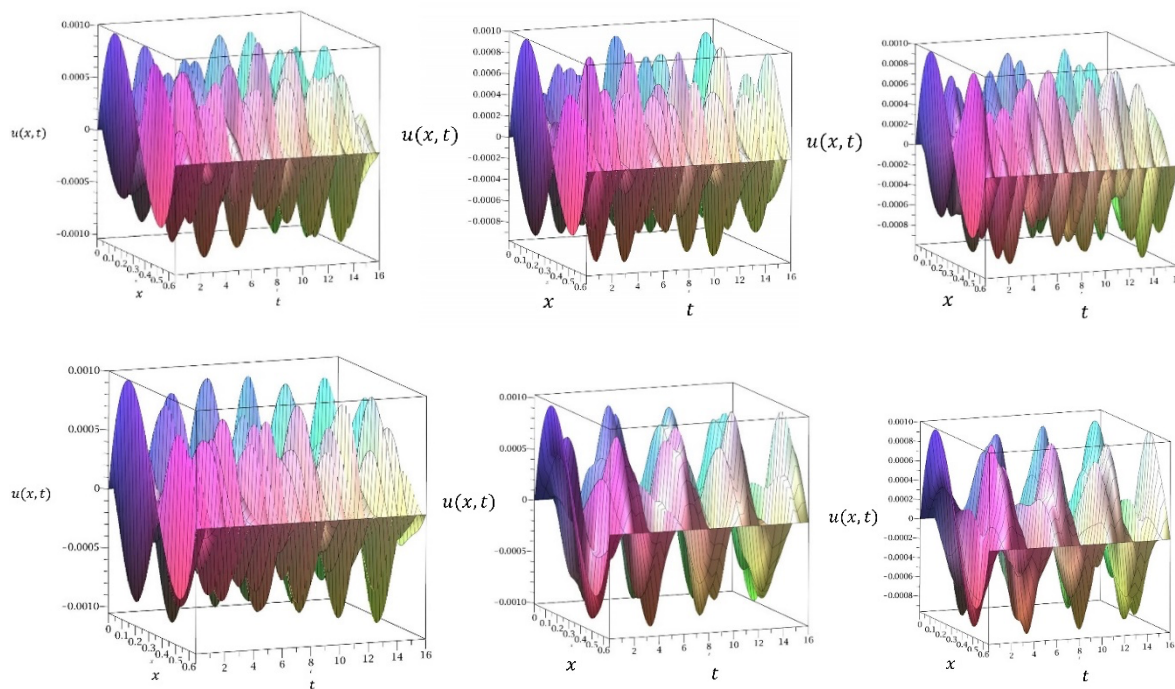
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{0,65} \int_0^{\infty} \left(\frac{14}{225} x^3 - \frac{71}{1.125} x^2 + \frac{21}{1.500} x \right) \sin\left(\frac{n\pi}{0,65} x\right) dx \quad (51)$$

konvergen menuju 0. Simulasi frekuensi gitar akustik dengan syarat awal persamaan kubik ada pada Tabel 5. Untuk syarat awal persamaan kubik, gitar akustik memiliki amplitudo tertinggi sebesar 0,0008266605803 m.

Gambar 11 adalah grafik pergerakan amplitudo pada gitar akustik dengan syarat awal persamaan kubik masing-masing senar.

Tabel 5. Simulasi frekuensi berdasarkan parameter tegangan (τ), amplitudo maksimum (σ_2), massa jenis (ρ), inersia (I), dan Modulus Young (E) dengan syarat awal persamaan pubik pada alat musik gitar akustik

Senar	$f(\text{Hz})$	$\tau(\text{kg})$	$\rho(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})$	$I(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2})$	$E(\text{GPa})$	$\sigma_1(\text{m})$
1	329,628	11,748042382	0,0001638387	0,0000101470	96	0,0008266605803
2	246,942	11,702683146	0,0002824787	0,0000133756	96	0,0008266605803
3	195,998	14,242800418	0,0004798589	0,0000232921	96	0,0008266605803
4	146,832	14,378878129	0,0033834130	0,0000509659	96	0,0008266605803
5	110,000	13,879926522	0,0055193260	0,0000855582	96	0,0008266605803
6	82,407	13,199537967	0,0002389456	0,0001176138	96	0,0008266605803



Gambar 11. Grafik senar 6 (E2) untuk gitar akustik dengan syarat awal persamaan kubik

Pada Gambar 11, terlihat bahwa semakin tinggi frekuensi sebuah senar, semakin rendah massa jenis senar yang dimiliki, semakin renggang juga amplop gelombang yang dimiliki pada suatu senar. Senar pertama memiliki amplop gelombang yang paling rapat dan senar keenam memiliki amplop gelombang yang paling renggang.

Amplitudo tertinggi yang dihasilkan oleh gitar *bass* elektrik dengan syarat awal

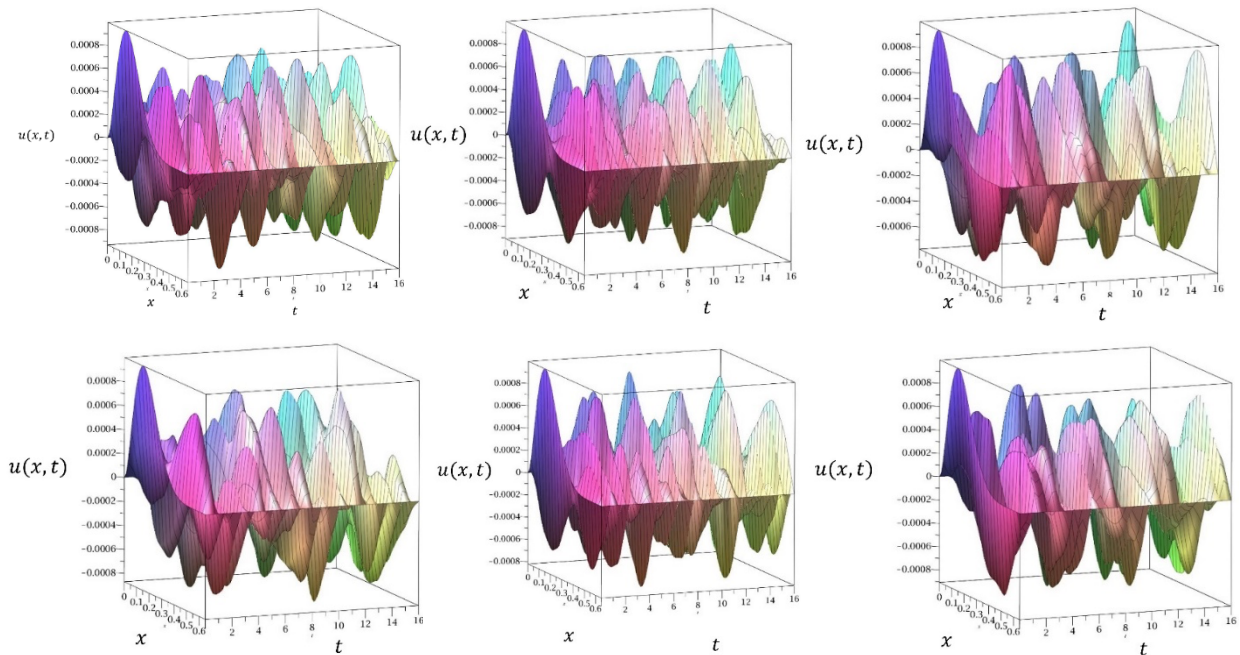
distribusi beta adalah pada $n = 1$, dengan hasil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{0,65} \int_0^{\infty} (4,515274103x^2 (0,65 - x)^{\frac{20}{3}}) \sin(\frac{n\pi}{0,65} x) dx \quad (52)$$

konvergen menuju 0. Maka dari itu, simulasi frekuensi gitar akustik dengan syarat awal distribusi beta pada Tabel 6. Untuk syarat awal distribusi beta, gitar akustik memiliki amplitudo tertinggi sebesar 0,0004746402683 m.

Tabel 6. Simulasi frekuensi berdasarkan parameter tegangan (τ), amplitudo maksimum (α_1), dan massa jenis (ρ), inersia (I), dan Modulus Young (E) dengan syarat awal distribusi beta pada alat musik gitar akustik

Senar	$f(\text{Hz})$	$\tau(\text{kg})$	$\rho(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})$	$I(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2})$	$E(\text{GPa})$	$\sigma_1(\text{m})$
1	329,628	11,748042382	0,000710138	0,0000101470	96	0,0004746402683
2	246,942	11,702683146	0,001189412	0,0000133756	96	0,0004746402683
3	195,998	14,242800418	0,002259564	0,0000232921	96	0,0004746402683
4	146,832	14,378878129	0,003383413	0,0000509659	96	0,0004746402683
5	110,000	13,879926522	0,005519326	0,0000855582	96	0,0004746402683
6	82,407	13,199537967	0,000238945	0,0001176138	96	0,0004746402683



Gambar 12. Grafik senar 4 (D3) untuk gitar akustik dengan syarat awal distribusi beta

Gambar 12 adalah grafik pergerakan amplitudo pada gitar akustik dengan syarat awal distribusi beta masing-masing senar. Pada Gambar 12, terlihat bahwa semakin tinggi frekuensi sebuah senar, semakin rendah massa jenis senar yang dimiliki, semakin renggang juga amplop gelombang yang dimiliki pada suatu senar. Senar pertama memiliki amplop gelombang yang paling rapat dan senar keenam memiliki amplop gelombang yang paling renggang.

KESIMPULAN

Untuk gitar *bass* elektrik, persamaan frekuensi yang dihasilkan:

$$f_n = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} n}{1,73},$$

Sementara untuk gitar akustik, persamaan frekuensi yang dihasilkan:

$$f_n = \frac{1}{1,3\pi} \sqrt{\frac{n\pi(EI n\pi + \tau 0,65)}{\rho}}.$$

Dari simulasi parameter frekuensi yang didapatkan melalui PDP analitik, di dalam gitar bass maupun gitar akustik, setiap senar yang dipetik memiliki parameter-parameter yang mempengaruhi frekuensi suatu senar. Untuk gitar bass, parameter yang digunakan adalah tegangan (τ) dan massa jenis (ρ). Sementara untuk gitar akustik, terdapat parameter yang sama seperti gitar bass dengan tambahan parameter Modulus Young (E) dan inersia senar (I). Untuk bass dengan tegangan (τ) yang diberikan, semakin tinggi frekuensi sebuah senar, semakin rendah massa jenis pada senar (ρ), dan setiap senar memiliki amplitudo (α_1) yang sama untuk semua senar pada alat musik yang sama.

Untuk gitar akustik, sama seperti gitar bass, semakin rendah massa jenis pada senar (ρ), dengan diberikan tegangan (τ) pada masing-masing senar gitar akustik, semakin tinggi frekuensi yang dihasilkan oleh gitar akustik. Tidak hanya itu, terdapat tambahan variabel diberikan Modulus Young (E) yang sama untuk masing-masing senar dan semakin tinggi frekuensi sebuah senar semakin rendah inersia (I) yang dimiliki sebuah senar, serta setiap senar memiliki amplitudo (σ_1) yang sama untuk semua senar pada alat musik yang sama.

Dari ketiga syarat awal, grafik untuk syarat awal kuadrat adalah simetris sehingga itu kurang menunjukkan pemodelan yang titik puncaknya adalah posisi petik ($x = k$). Untuk syarat awal kubik, walaupun puncaknya tepat, bentuknya tidak sesuai yang diharapkan tetapi tetap disimulasikan disini untuk melihat konsistensi dan frekuensi pada masing-masing alat musik. Dari situ terdapat juga syarat awal distribusi beta untuk dibandingkan karena memiliki grafik asimetris dengan posisi petik menjadi puncak. Untuk penelitian pada Skripsi ini, model terbaik yang digunakan adalah syarat awal distribusi beta.

SARAN

Penelitian selanjutnya dapat menggunakan alat musik lain seperti biola, drum, dan lain-lain. Untuk alat musik yang sama, metode lain yang dapat digunakan adalah persamaan diferensial parsial numerik dengan simulasi menggunakan perangkat lunak Python, untuk hasil pemodelan parameter pada frekuensi yang lebih akurat dan penyelesaian nonhomogen dengan syarat batas tak nol. Selain itu, untuk syarat awal $h(x)$ tak nol penyelesaian dapat dilakukan secara numerik dengan metode *cubic spline*.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., & Rorres, C. (2005). *Elementary linear algebra* (9th ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2013). *Mathematical methods for physicists* (7th ed.). Elsevier, Inc.
- Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2009). *Complex variables and applications* (8th ed.). McGraw-Hill Companies.
- Harmonic Motion. (N.d.) Retrieved July 12, 2022 from https://labs.phys.utk.edu/mbreinig/physics221core/modules/m11/harmonic_motion.html
- Kobayashi, T., Wakatsuki, N., & Mizutani, K. (2010). Inharmonicity of guitar string vibration influenced by body resonance and fingering position. *Proceedings of the International Symposium on Music Acoustics* (1321). Associated Meeting of the International Congress on Acoustics.
- Kusumastuti, A., Jamhuri, M., & Hidayati, N. A. (2019). Analytical solution of the string vibration model on Sasando musical instrument. *Journal of Physics: Conference Series*, 1321, 022088. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1321/2/022088>
- Lambson, O. C. (2018). *The effects of a magnetic pickup on the vibration response of an electric guitar string* [Thesis]. Stellenbosch University, Afrika.
- Strauss, W. A. (2008). *Partial differential equations: an introduction* (2nd ed.). John Wiley & Sons, Ltd.
- Vinod Kumar, A. S., & Ganguli, R. (2011). Violin string shape functions for finite element analysis of rotating Timoshenko beams. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(9):1091-1103. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.04.002>
- Wijnand, M., d'Andréa-Novel, B., Helie, T., & Roze D. (2020). Active control of the axisymmetric vibration modes of a tom-tom drum using a modal-based observer-regulator. *Forum Acusticum* (pp. 639–646). HAL Open Science. <http://doi.org/10.48465/fa.2020.0439>