e-ISSN 2598-9596

MODEL MATEMATIKA UNTUK MASALAH TRANSPORTASI LEBIH DARI SATU PRODUK

[*MATHEMATICAL MODELS FOR TRANSPORTATION PROBLEMS INVOLVING MORE THAN ONE PRODUCT*]

Cindy Novian Santoso[1], Petrus Widjaja[2], Lina Cahyadi[3*]
[1]PT. Indonesia Morowali Industrial Park, Jakarta Barat, DKI Jakarta
[2,3]Program Studi Matematika, Universitas Pelita Harapan, Tangerang, Indonesia
*Korespondensi penulis: lina.cahyadi@uph.edu

ABSTRACT

Distribution companies need to plan efficient shipments to avoid incurring large shipping costs. Therefore, a company that addresses transportation problems by choosing the right distribution pattern can obtain optimal distribution costs. The transportation problem model is applied to allocate the same product to the destination places. In the problem of distributing more than one product, the transportation problem model is modified so that it can be used to optimize shipping costs. This study aimed to optimize distribution costs using a modified transportation problem model. The data obtained from the "Sejahtera" store included data on distribution costs, supply from sources, and requests from each store. The analysis was carried out by forecasting the demand for products processed by a time series process to assist companies in estimating the amount of demand for each product in the future. Then, optimization was carried out by testing the modified model for the transportation problem of more than one product under three conditions. Optimization of distribution costs was carried out by finding a feasible initial solution using the northwest corner method, the minimum cost method, and the modified Vogel's Approximation Method (VAM) approximation method, followed by determining the optimum solution using the stepping-stone method and the Modified Distribution Method (MODI). Based on the research conducted, the three conditions were tested using a modified transportation problem model for more than one product resulting in optimum shipping costs.

Keywords: *modification of transportation problems; time series; optimization*

ABSTRAK

Perusahaan distribusi perlu merencanakan pengiriman yang efisien agar tidak mengeluarkan biaya pengiriman yang besar dengan meminimalkan biaya pengiriman. Oleh karena itu, perusahaan menerapkan masalah transportasi dalam memilih pola distribusi yang tepat untuk memperoleh biaya distribusi yang optimal. Masalah transportasi diterapkan untuk mengalokasikan produk yang sama ke tempat-tempat tujuan. Dalam permasalahan pendistribusian lebih dari satu produk, model masalah transportasi dimodifikasi sehingga dapat digunakan untuk mengoptimalkan biaya pengiriman. Penelitian ini bertujuan untuk mengoptimalkan biaya distribusi menggunakan model masalah transportasi yang dimodifikasi. Data yang diperoleh dari toko “Sejahtera” meliputi data biaya distribusi, persediaan dari sumber dan permintaan setiap toko. Analisis dilakukan dengan meramalkan permintaan produk yang diolah dengan proses *time series* untuk membantu perusahaan dalam memperkirakan jumlah permintaan masing-masing produk untuk waktu yang akan datang. Kemudian, dilakukan optimasi dengan menguji model yang sudah dimodifikasi untuk masalah transportasi lebih dari satu produk dalam tiga kondisi. Optimasi biaya distribusi dilakukan dengan mencari pemecahan awal yang layak menggunakan metode sudut barat laut, metode biaya minimum dan metode aproksimasi *Vogel's Approximation Method* (VAM) yang dimodifikasi dilanjutkan dengan menentukan solusi optimum menggunakan metode batu loncatan (*stepping-stone*) dan *Modified Distribution Method* (MODI) yang dimodifikasi. Berdasarkan penelitian yang dilakukan, ketiga kondisi yang diuji menggunakan model masalah transportasi yang dimodifikasi untuk lebih dari satu produk menghasilkan biaya pengiriman yang optimum.

Kata kunci: modifikasi masalah transportasi; *time series*; optimasi

PENDAHULUAN

Dalam menjalankan suatu bisnis, adanya persaingan merupakan hal yang biasa. Perusahaan yang ingin bertahan harus menjaga hubungan yang baik dengan pelanggan dengan mementingkan kepuasan pelanggan (Blocher *et al.*, 2013). Salah satu faktor yang mempengaruhi kepuasan pelanggan adalah harga suatu produk yang didasarkan pada biaya operasional perusahaan yaitu, biaya produksi dan biaya nonproduksi.

Biaya nonproduksi yang berperan penting untuk perusahaan yang melakukan distribusi adalah biaya pengiriman. Oleh karena itu, perusahaan perlu merencanakan pengiriman yang efisien dengan menerapkan masalah transportasi untuk memperoleh biaya distribusi yang optimal. Masalah transportasi diterapkan untuk mengalokasikan produk yang sama dari sumber-sumber yang ada ke tempat-tempat tujuan dengan optimal (Mulyono, 2007).

Dalam kenyataannya, perusahaan-perusahaan tidak hanya memiliki satu jenis produk untuk dipasarkan melainkan lebih dari satu jenis produk yang berbeda (Kotler and Keller, 2016).

Untuk menyelesaikan permasalahan optimasi biaya pengiriman masalah transportasi lebih dari satu produk, akan dilakukan modifikasi model masalah transportasi (Sitorus *et al.*, 2017). Diperlukan modifikasi model karena barang yang didistribusikan lebih dari 1 barang. Setelah membandingkan dari 3 metode yang ada, dipilih nilai biaya yang paling kecil. Data permintaan yang telah didapatkan akan diolah dengan proses *time series* kemudian dilakukan optimasi dengan menguji model yang sudah dimodifikasi. Modifikasi dilakukan dengan *trial and error*. Lalu model yang sudah dimodifikasi akan diuji dalam beberapa kondisi.

BAHAN DAN METODE

Batasan Masalah

Terdapat beberapa batasan masalah yang digunakan dalam penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Tempat asal pengiriman, tujuan, kendaraan dan biaya pengiriman, termasuk upah supir dan harga bensin, dianggap konstan.

 e-ISSN 2598-9596

2. Pengujian dilakukan untuk kasus dua jenis produk.

Metodologi Penelitian

Modifikasi Model Masalah Transportasi

Tabel masalah transportasi untuk masalah transportasi lebih dari satu produk adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Tabel masalah transportasi lebih dari satu produk

Sumber	Tujuan 1	2	…	n	Penawaran
1	$\boxed{c_{1,11}, c_{2,11}, \dots, c_{k,11}}$ $x_{1,11}, x_{2,11}, \dots, x_{k,11}$	$\boxed{c_{1,12}, c_{2,12}, \dots, c_{k,12}}$ $x_{1,12}, x_{2,12}, \dots, x_{k,12}$	…	$\boxed{c_{1,1n}, c_{2,1n}, \dots, c_{k,1n}}$ $x_{1,1n}, x_{2,1n}, \dots, x_{k,1n}$	$a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{k,1}$
2	$\boxed{c_{1,21}, c_{2,21}, \dots, c_{k,21}}$ $x_{1,21}, x_{2,21}, \dots, x_{k,21}$	$\boxed{c_{1,22}, c_{2,22}, \dots, c_{k,22}}$ $x_{1,22}, x_{2,22}, \dots, x_{k,22}$	…	$\boxed{c_{1,2n}, c_{2,2n}, \dots, c_{k,2n}}$ $x_{1,2n}, x_{2,2n}, \dots, x_{k,2n}$	$a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{k,2}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	$\boxed{c_{1,m1}, c_{2,m1}, \dots, c_{k,m1}}$ $x_{1,m1}, x_{2,m1}, \dots, x_{k,m1}$	$\boxed{c_{1,m2}, c_{2,m2}, \dots, c_{k,m2}}$ $x_{1,m2}, x_{2,m2}, \dots, x_{k,m2}$	…	$\boxed{c_{1,mn}, c_{2,mn}, \dots, c_{k,mn}}$ $x_{1,mn}, x_{2,mn}, \dots, x_{k,mn}$	$a_{1,m}, a_{2,m}, \dots, a_{k,m}$
Permintaan	$b_{1,1}, b_{2,1}, \dots, b_{k,1}$	$b_{1,2}, b_{2,2}, \dots, b_{k,2}$	…	$b_{1,n}, b_{2,n}, \dots, b_{k,n}$	

Keterangan: m adalah baris, n adalah kolom.

Masalah transportasi lebih dari satu produk dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\text{Minimumkan } Z \;&=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} c_{p,ij}\, x_{p,ij} \\
\text{dengan kendala} \quad & \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} x_{p,ij} \le a_{p,i}, \quad a_{p,i} > 0,\ i = 1, 2, \dots, m;\ p = 1, 2, \dots, \\
& \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} x_{p,ij} = b_{p,j}, \quad b_{p,j} > 0,\ j = 1, 2, \dots, n;\ p = 1, 2, \dots, \\
& x_{p,ij} \ge 0, \forall_{i,j,p}
\end{aligned} \tag{1}$$

dengan:

$x_{p,ij}$: jumlah unit produk *p* yang dikirim dari sumber *i* ke tujuan *j*
$c_{p,ij}$: biaya pengiriman per unit produk *p* dari sumber *i* ke tujuan *j*
$a_{p,i}$: kapasitas penawaran produk *p* dari sumber *i*
$b_{p,j}$: jumlah permintaan produk *p* dari tujuan *j*
m : banyaknya sumber
n : banyaknya tujuan
k : jenis produk
Z : total dari biaya pengiriman dikali jumlah unit yang dikirim

Pemecahan Awal yang Layak

Terdapat tiga metode pemecahan awal yang layak sekaligus modifikasi untuk masalah transportasi lebih dari satu produk, yaitu:

1. Modifikasi Metode Sudut Barat Laut
   Dimulai pada pojok kiri atas, $x_{1,11}$. Pengalokasian selanjutnya disesuaikan sampai penawaran dan permintaan produk p terpenuhi.
2. Modifikasi Metode Biaya Minimum
   Mengalokasikan pada tempat yang memiliki satuan biaya terkecil ($c_{p,ij}$). Selanjutnya, alokasikan pada tempat yang memiliki biaya terkecil berikutnya sampai semua penawaran dan permintaan produk p terpenuhi.
3. Modifikasi Metode Aproksimasi Vogel
   Menghitung *penalty* setiap baris dan kolom dengan mengurangkan dua biaya terendah ($c_{p,ij}$) dalam baris dan kolom yang sama. Kemudian, memilih perbedaan terbesar di antara baris dan kolom dan alokasikan pada $x_{p,ij}$ dengan biaya terkecil dalam baris atau kolom yang dipilih. Menghitung kembali perbedaan baris dan kolom jika ada penawaran dan permintaan yang belum terpenuhi.

Solusi Optimum

Syarat untuk melakukan perbaikan adalah setiap variabel dasar ($x_{1,11}$ sampai dengan $x_{1,mn}$) dan angkanya bukan nol, masing-masing produk harus memenuhi syarat $(m + n - 1)$, dengan m adalah baris dan n adalah kolom. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi optimum:

1. Modifikasi Metode Batu Loncatan
   Setelah pemecahan awal yang layak diperoleh, pilih variabel tak-dasar (variable yang tidak ada yang

mengandung x1,11-x1,mn) masing-masing produk untuk dipertimbangkan sebagai variabel masuk kemudian membuat loop tertutup. Pilih nilai biaya pengiriman (c_p,ij) yang paling negatif dan melakukan perubahan jalur pada variabel tak-dasar terpilih. Mengulangi langkah tersebut sampai diperoleh nilai biaya evaluasi variabel tak-dasar tidak ada yang negatif.

2. Modifikasi Metode MODI (Aqidawati *et al.*, 2017)

Cara perhitungan metode MODI dengan menghitungi nilai (c_p,ij) dan menambahkan satu kolom up,i disebelah kanan dan satu baris vp,j dibagian bawah. Lalu up,i dan vp,j dapat dicari dengan persamaan sebagai berikut:

$$u_{p,i} + v_{p,j} = c_{p,ij}, \qquad (2)$$

dengan:

$u_{p,i}$: pengalokasian produk p dari sumber i
$v_{p,j}$: pengalokasian produk p ke tujuan j
$c_{p,ij}$: biaya pengiriman per unit produk p dari sumber i ke tujuan j

Hitung nilai ($\bar{c}_{p,ij}$) untuk semua variabel tak-dasar dengan: ($\bar{c}_{p,ij}$) = $c_{p,ij} - u_{p,i} - v_{p,j}$ dan pilih nilai ($\bar{c}_{p,ij}$) yang memiliki nilai negatif terbesar sebagai variabel masuk (variable tak-dasar menjadi variable dasar). Kemudian, menentukan loop tertutup untuk menentukan variabel keluar (variable dasar menjadi tak dasar).

Data

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengoptimasi biaya pengiriman masalah transportasi lebih dari satu produk. Oleh karena itu, dibutuhkan beberapa data yang akan digunakan untuk melakukan optimasi. Data yang digunakan berupa data biaya distribusi dari sumber ke toko tujuan yang tertera pada Tabel 2, persediaan produk dari sumber dan data permintaan produk yang tertera pada Tabel 3. Data permintaan yang akan digunakan diolah pada tahap *forecasting*.

Tabel 2. Data biaya distribusi telur dan beras

Sumber	Tujuan			
	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4
Sumber 1	Rp 1.920	Rp 1.750	Rp 2.100	Rp 2.320
Sumber 2	Rp 1.950	Rp 1.800	Rp 2.350	Rp 2.400
Sumber 3	Rp 1.850	Rp 1.720	Rp 2.190	Rp 2.300

Tabel 3. Data persediaan telur dan beras

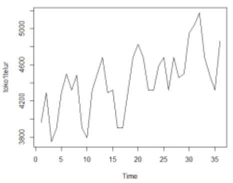
Sumber	Persediaan Telur (kg)	Persediaan Beras (kg)
Sumber 1	7.085	2.650
Sumber 2	5.725	3.690
Sumber 3	5.910	3.185

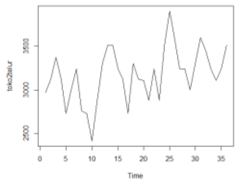
Forecasting Data

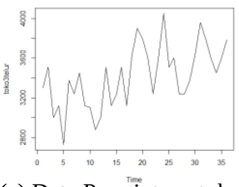
Data permintaan yang telah didapat kemudian digunakan untuk melakukan prediksi dengan menerapkan metode ARIMA. Dari data yang diperoleh, akan diprediksi data permintaan telur dan beras untuk Juli sampai Desember 2019.

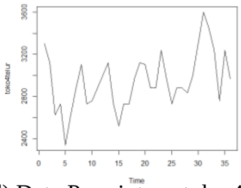
A. Data Permintaan

Data yang digunakan adalah data permintaan telur dan beras setiap toko tujuan dari Juli 2016 sampai Juni 2019. Permintaan telur dan beras pada setiap toko mengalami peningkatan terlihat pada Gambar 1 dan 2. Terlihat pada Gambar 1 dan 2 Data permintaan telur dan beras pada setiap toko dapat dikatakan sebagai data trend naik. Adanya tren pada data mengindikasikan bahwa permintaan telur dan beras tidak stasioner.

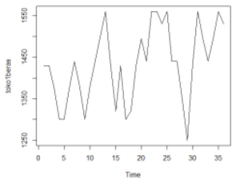

(a) Data Permintaan toko 1

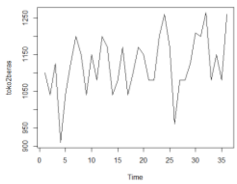

(b) Data Permintaan toko 2

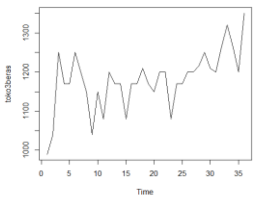

(c) Data Permintaan toko 3

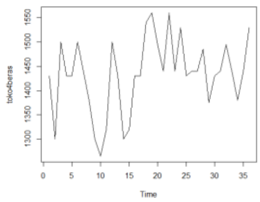

(d) Data Permintaan toko 4

Gambar 1. Data permintaan telur


(a) Data Permintaan toko 1


(b) Data Permintaan toko 2


(c) Data Permintaan toko 3


(d) Data Permintaan toko 4

Gambar 2. Data permintaan beras

B. Kestasioneran

Data dikatakan stasioner jika memiliki rata-rata, variansi dan kovarian yang konstan. Jika data tidak stasioner, maka dilakukan *differencing* untuk mengatasinya. Augmented Dickey-Fuller (ADF) dapat digunakan untuk menguji kestasioneran data.

Data diuji menggunakan metode ADF dengan software RStudio. Data dikatakan tidak stasioner apabila memiliki p-value > a = 0.05. Pada Tabel 4, data yang tidak stasioner dilakukan *differencing* sampai p-value < a. Setelah semua data telah memenuhi sifat stasioner, dilanjutkan ke tahap identifikasi model.

Tabel 4. Kestasioneran

Produk	Toko	*p-value*	Keterangan	*Differencing*	*p-value*	Keterangan
Telur	Toko 1	0.01	Stasioner	-	-	-
	Toko 2	0.0429	Stasioner	-	-	-
	Toko 3	0.0711	Tidak Stasioner	1	0.01	Stasioner
	Toko 4	0.0202	Stasioner	-	-	-
Beras	Toko 1	0.0525	Tidak Stasioner	1	0.0248	Stasioner
	Toko 2	0.0165	Stasioner	-	-	-
	Toko 3	0.5876	Tidak Stasioner	1	0.0379	Stasioner
	Toko 4	0.4394	Tidak Stasioner	1	0.0218	Stasioner

C. Identifikasi Model Deret Waktu

Menentukan parameter model ARMA dengan menggunakan metode *Extended Autocorrelation Function* (EACF). Parameter ditentukan dengan melihat daerah bersimbol "o" dan dipilih daerah sekitar kiri atas pada hasil EACF. Kemudian, didapatkan beberapa model yang mungkin untuk setiap permintaan produk seperti terlihat pada Gambar 3.

```
AR/MA
  0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 x o o o o x o o o o
1 o o o o o o o o o o
2 o o o o o o o o o o
3 o o o o o o o o o o
4 x o x o o o o o o o
5 x o o o o o o o o o
6 o o o o o o o o o o
7 o o o x o o o o o o
```

Gambar 3. Hasil EACF Toko 1 telur

Pada Gambar 3 terlihat daerah yang bersimbol "o" dan dipilih daerah di sekitar kiri atas. Dari hasil EACF, beberapa model yang mungkin untuk toko 1 permintaan telur adalah model ARIMA(0,0,1), ARIMA(1,0,1) dan ARIMA(1,0,0).

Hal yang sama dilakukan pada data-data yang lain untuk menentukan parameter pada model ARIMA. Dari beberapa model tersebut, langkah selanjutnya adalah menentukan model terbaik dengan melakukan estimasi parameter.

Tabel 5. Identifikasi model

Produk	Toko	Model
Telur	Toko 1	ARIMA(0,0,1), ARIMA(1,0,1), ARIMA(1,0,0)
	Toko 2	ARIMA(0,0,1), ARIMA(1,0,1), ARIMA(1,0,2)
	Toko 3	ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,1), ARIMA(0,1,2)
	Toko 4	ARIMA(0,0,1), ARIMA(1,0,1), ARIMA(1,0,0)
Beras	Toko 1	ARIMA(0,1,0), ARIMA(0,1,2), ARIMA(1,1,2)
	Toko 2	ARIMA(0,0,1), ARIMA(1,0,1), ARIMA(2,0,2)
	Toko 3	ARIMA(0,1,1), ARIMA(1,1,1), ARIMA(1,1,2)
	Toko 4	ARIMA(0,1,1), ARIMA(0,1,2), ARIMA(1,1,1)

D. Estimasi Parameter

Metode Maximum Likelihood digunakan untuk melakukan estimasi parameter dengan memaksimumkan fungsi kepadatan peluang bersama. Model untuk toko 1 permintaan telur telah diidentifikasi sebelumnya dan perlu dilakukan pemilihan model terbaik. Metode Akaike Information Criterion (AIC) digunakan untuk memilih model terbaik dengan melihat nilai AIC terendah dari antara model-model yang mungkin.

Dari Tabel 6 dan Tabel 7 terlihat bahwa pada toko 1 permintaan telur dan beras, nilai AIC terendah adalah 512.4 sehingga model ARIMA(1,0,0) merupakan model terbaik. Hal yang sama dilakukan pada data yang lain dengan memilih nilai AIC terendah. Model terbaik yang terpilih kemudian dilanjutkan ke tahap *diagnostic* model deret waktu lalu ke tahap *forecasting*.

Tabel 6. Estimasi parameter permintaan telur

Toko 1			Toko 2		
Model	*Log Likelihood*	AIC	Model	*Log Likelihood*	AIC
ARIMA(0,0,1)	-255.55	515.1	ARIMA(0,0,1)	-252.08	508.1
ARIMA(1,0,1)	-253.92	513.8	ARIMA(1,0,1)	-251.44	508.8
ARIMA(1,0,0)	-254.22	512.4	ARIMA(1,0,2)	-249.98	507.9
Toko 3			Toko 4		
Model	*Log Likelihood*	AIC	Model	*Log Likelihood*	AIC
ARIMA(0,1,1)	-246.59	495.1	ARIMA(0,0,1)	-246.37	496.7
ARIMA(1,1,1)	-245.71	495.4	ARIMA(1,0,1)	-245.55	497.1
ARIMA(1,1,2)	-257.77	495.5	ARIMA(1,0,0)	-245.91	495.8

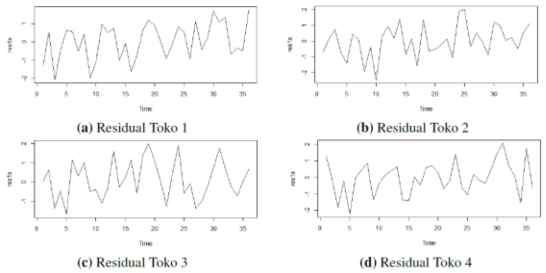
Tabel 7. Estimasi parameter permintaan beras

Toko 1			Toko 2		
Model	*Log Likelihood*	AIC	Model	*Log Likelihood*	AIC
ARIMA(0,1,0)	-204.01	408.02	ARIMA(0,0,1)	-207.83	419.66
ARIMA(0,1,2)	-199.2	402.41	ARIMA(1,0,1)	-207.83	421.66
ARIMA(1,1,2)	-199.01	404.03	ARIMA(2,0,2)	-207.58	425.15
Toko 3			Toko 4		
Model	*Log Likelihood*	AIC	Model	*Log Likelihood*	AIC
ARIMA(0,1,1)	-196.91	395.82	ARIMA(0,1,1)	-201.7	405.4
ARIMA(1,1,1)	-196.61	397.22	ARIMA(0,1,2)	-200.49	404.98
ARIMA(1,1,2)	-196.55	399.11	ARIMA(1,1,1)	-200.33	404.65

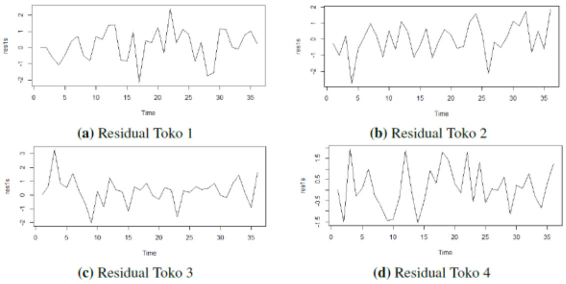
E. Diagnostik Model Deret Waktu

Setelah model didapatkan, dilakukan pengujian diagnostik model dengan melihat plot data residual serta ACF dan PACF data residual. Pada Gambar 4 dan 5, terlihat data tidak membentuk pola tertentu sehingga model dapat dikatakan cukup baik walaupun terdapat kenaikan dan penurunan yang cukup signifikan di beberapa bagian.

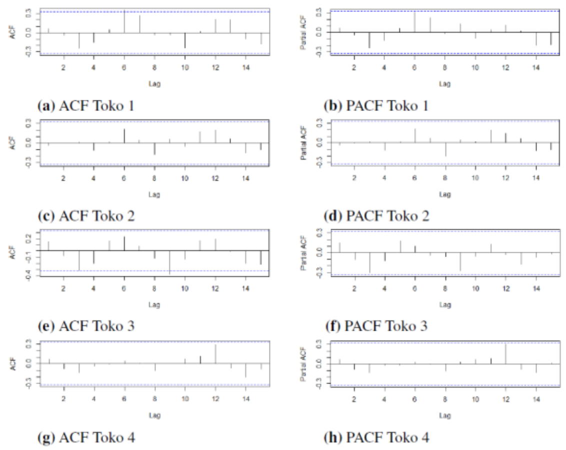
Gambar 6 dan 7 merupakan grafik ACF dan PACF dari residual permintaan telur dan beras. Dapat dilihat bahwa mayoritas nilai ACF dan PACF berada dalam garis putus-putus yang disebut sebagai batas kepercayaan sehingga model dapat dikatakan cukup baik untuk melakukan *forecasting*.



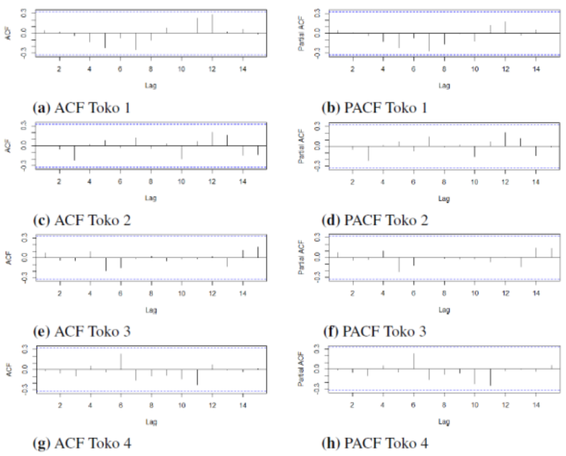
Gambar 4. Grafik residual telur



Gambar 5. Grafik residual beras



Gambar 6. Grafik ACF/PACF residual telur



Gambar 7. Grafik ACF/PACF residual beras

F. Forecasting

Berdasarkan estimasi parameter yang telah didapat, dilakukan *forecasting* permintaan telur dan beras pada setiap toko untuk bulan berikutnya. Berikut adalah hasil dari forecasting permintaan telur dan beras dengan mengevaluasi nilai galat menggunakan metode *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE).

Tabel 8. Prediksi permintaan telur

Bulan	Toko	Prediksi	Aktual	Galat
Juli	Toko 1	4.681,641	4.735	1,126906
	Toko 2	3.416,411	3.510	2,666353
	Toko 3	3.646,508	3.510	3,889117
	Toko 4	2.962,866	3.120	5,036346
Agustus	Toko 1	4.574,765	4.455	2,688328
	Toko 2	3.203,184	3.240	1,136296
	Toko 3	3.646,508	3.645	0,041372
	Toko 4	2.959,105	3.000	1,363167
September	Toko 1	4.510,722	4.500	0,238267
	Toko 2	3.161,735	3.300	4,189848
	Toko 3	3.646,508	3.750	2,759787
	Toko 4	2.957,122	3.000	1,429267
Oktober	Toko 1	4.472,346	4.455	0,389360
	Toko 2	3.190,093	3.330	3,330515
	Toko 3	3.646,508	3.645	0,041372
	Toko 4	2.956,076	2.835	4,270758
November	Toko 1	4.449,351	4.320	2,994236
	Toko 2	3.170,691	3.240	2,139167
	Toko 3	3.646,508	3.600	1,291889
	Toko 4	2.955,525	2.880	2,622396
Desember	Toko 1	4.435,571	4.290	3,393263
	Toko 2	3.183,965	3.330	3,516212
	Toko 3	3.646,508	3.630	0,454766
	Toko 4	2.955,234	2.970	0,497172

Berdasarkan hasil prediksi pada Tabel 8, permintaan telur dan beras mengalami kenaikan untuk beberapa bulan berikutnya. Dari perbandingan permintaan telur aktual dengan hasil prediksi, nilai galat berada dalam 0,041372% sampai 5,036346% sedangkan, perbandingan permintaan beras aktual dengan hasil

 e-ISSN 2598-9596

prediksi, nilai galat berada dalam 0,291022% sampai 5,6435% terlihat pada Tabel 9.

Tabel 9. Prediksi permintaan beras

Bulan	Toko	Prediksi	Aktual	Galat
Juli	Toko 1	1.481,633	1.560	5,023526
	Toko 2	1.144,946	1.170	2,141368
	Toko 3	1.283,567	1.300	1,264077
	Toko 4	1.476,276	1.430	3,236084
Agustus	Toko 1	1.470,235	1.485	0,994276
	Toko 2	1.121,726	1.080	3,863519
	Toko 3	1.270,759	1.485	1,885993
	Toko 4	1.456,993	1.470	0,884830
September	Toko 1	1.470,235	1.500	1,984333
	Toko 2	1.121,726	1.125	0,291022
	Toko 3	1.268,290	1.250	1,463200
	Toko 4	1.450,072	1.500	3,328533
Oktober	Toko 1	1.470,235	1.485	0,994276
	Toko 2	1.121,726	1.080	3,863519
	Toko 3	1.267,814	1.215	4,346831
	Toko 4	1.447,588	1.485	2,519327
November	Toko 1	1.470,235	1.440	2,099653
	Toko 2	1.121,726	1.080	3,863519
	Toko 3	1.267,722	1.200	5,643500
	Toko 4	1.446,697	1.440	0,465069
Desember	Toko 1	1.470,235	1.430	2,813636
	Toko 2	1.121,726	1.100	1,978182
	Toko 3	1.267,704	1.210	4,768926
	Toko 4	1.446,377	1.430	1,145245

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kondisi I

Model masalah transportasi dalam kondisi I adalah setiap sumber memproduksi telur dan beras kemudian setiap tujuan membeli kedua jenis produk tersebut. Tabel 10 dan Tabel 11 adalah masalah transportasi pendistribusian telur dan beras yang akan digunakan untuk mencari biaya pengiriman yang optimal. Jumlah penawaran dengan permintaan kedua produk tidak seimbang, sehingga perlu dibuat suatu variabel buatan (dummy), yaitu tujuan buatan (toko 5) karena jumlah penawaran lebih besar dari jumlah permintaan.

Tabel 10. Masalah transportasi pendistribusian telur dan beras kondisi I

Sumber	Toko				Penawaran
	1	2	3	4	
1	$\boxed{1.920}$	$\boxed{1.750}$	$\boxed{2.100}$	$\boxed{2.320}$	7.085, 2.650
2	$\boxed{1.950}$	$\boxed{1.800}$	$\boxed{2.350}$	$\boxed{2.400}$	5.725, 3.690
3	$\boxed{1.850}$	$\boxed{1.720}$	$\boxed{2.190}$	$\boxed{2.300}$	5.910, 3.185
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	

Tabel 11. Masalah transportasi pendistribusian telur dan beras kondisi I seimbang

Sumber	Toko					Penawaran
	1	2	3	4	*Dummy* (5)	
1	$\boxed{1.920}$	$\boxed{1.750}$	$\boxed{2.100}$	$\boxed{2.320}$	$\boxed{0}$	7.085, 2.650
2	$\boxed{1.950}$	$\boxed{1.800}$	$\boxed{2.350}$	$\boxed{2.400}$	$\boxed{0}$	5.725, 3.690
3	$\boxed{1.850}$	$\boxed{1.720}$	$\boxed{2.190}$	$\boxed{2.300}$	$\boxed{0}$	5.910, 3.185
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

A. Penyelesaian Awal yang Layak

Pemecahan awal yang layak untuk masalah transportasi lebih dari satu jenis produk dengan metode sudut barat laut, metode biaya minimum dan metode aproksimasi Vogel yang dimodifikasi.

A.1. Metode Modifikasi Sudut Barat Laut

Metode sudut barat laut dimulai dengan mengalokasikan pada sudut kiri atas (Tabel 12).

Tabel 12. Pemecahan menggunakan metode sudut barat laut kondisi I

Sumber	Toko					Penawaran
	1	2	3	4	*Dummy* (5)	
1	$\boxed{1.920}$ 4.735, 1.560	$\boxed{1.750}$	$\boxed{2.100}$	$\boxed{2.320}$	$\boxed{0}$	7.085, 2.650
2	$\boxed{1.950}$ –	$\boxed{1.800}$	$\boxed{2.350}$	$\boxed{2.400}$	$\boxed{0}$	5.725, 3.690
3	$\boxed{1.850}$ –	$\boxed{1.720}$	$\boxed{2.190}$	$\boxed{2.300}$	$\boxed{0}$	5.910, 3.185
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

Sumber	Toko					Penawaran
	1	2	3	4	*Dummy* (5)	
1	$\boxed{1.920}$ 4.735, 1.560	$\boxed{1.750}$ 2.350, 1.090	$\boxed{2.100}$ –	$\boxed{2.320}$ –	$\boxed{0}$ –	7.085, 2.650
2	$\boxed{1.950}$ –	$\boxed{1.800}$ 1.160, 80	$\boxed{2.350}$ 3.510, 1.300	$\boxed{2.400}$ 1.055, 1.430	$\boxed{0}$ –, 880	5.725, 3.690
3	$\boxed{1.850}$ –	$\boxed{1.720}$ –	$\boxed{2.190}$ –	$\boxed{2.300}$ 2.065, –	$\boxed{0}$ 3.845, 3.185	5.910, 3.185
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Alokasikan pertama kali pada sudut kiri atas, yaitu x_{11} sesuai dengan penawaran dan permintaan. $x_{1,11}$ = min(7.085, 4.735) dan $x_{2,11}$ = min(2.650,1.560) sehingga x_{11} = 4.735, 1.560;
2. Karena permintaan produk 1 (telur) dan produk 2 (beras) pada toko 1 telah terpenuhi, selanjutnya alokasikan pada x_{12}. Kedua produk dialokasikan dengan $x_{1,12}$ = min(7.085 - 4.735, 3.510) dan $x_{2,12}$ = min(2.650-1.560,1.170) sehingga x_{12} = 2.350, 1.090; 47
3. Kemudian, alokasikan pada x_{22} karena penawaran sumber 1 telah terpenuhi dengan $x_{1,22}$ = min(5.725, 3.510-2.350) dan $x_{2,22}$ = min(3.690, 1.170-1.090) sehingga x_{22} = 1.160, 80;
4. Alokasikan pada x_{23} karena permintaan toko 2 telah terpenuhi dengan $x_{1,23}$ = min(5.725-1.160, 3.510) dan $x_{2,23}$ = min(3.690-80, 1.300) sehingga x_{23} =3.510, 1.300;
5. Selanjutnya, alokasikan pada x_{24} karena permintaan toko 3 telah terpenuhi dengan $x_{1,24}$ = min(5.725-1.160-3.510, 3.120) dan $x_{2,24}$ = min(3.690-80-1.300, 1.430) sehingga x_{24} = 1.055, 1.430;
6. Karena permintaan produk 1 pada toko 4 belum terpenuhi, maka alokasikan x_{34} dengan $x_{1,34}$ = min(5.910, 3.120-1.055) sehingga x_{34} = 2.065, -;
7. Penawaran produk 2 pada sumber 2 belum terpenuhi, maka kekurangannya dialokasikan pada toko 5 sehingga x_{25} = -, 880 dan penawaran kedua produk pada sumber 3 belum terpenuhi, maka kekurangannya dialokasikan pada toko 5 sehingga x_{35} = 3.845, 3.185. Biaya pengirimannya adalah:

$$
\begin{aligned}
Z &= [(4.735 \times 1.920) + (2.350 \times 1.750) + (1.160 \times 1.800) + (3.510 \times 2.350) \\
&+ (1.055 \times 2.400) + (2.065 \times 2.300) + (3.845 \times 0)] \\
&+ [(1.560 \times 1.920) + (1.090 \times 1.750) + (80 \times 1.800) + (1.300 \times 2.350) \\
&+ (1.430 \times 2.400) + (880 \times 0) + (3.185 \times 0)] \\
&= 42.528.200 \text{ (dalam Rupiah)}
\end{aligned}
$$

A.2. Metode Modifikasi Biaya Minimum

Metode biaya minimum dimulai dengan mengalokasikan kotak yang memiliki biaya terkecil. Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Biaya terkecil adalah c_{32}, maka alokasikan pada 32 dengan $x_{1,32}$ = min(5.910,3.510) dan $x_{2,32}$ = min(3.185, 1.170) sehingga x_{32} = 3.510, 1.170;

Tabel 13. Pemecahan menggunakan metode biaya minimum kondisi I

Sumber	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Toko *Dummy* (5)	Penawaran
1	[1.920]	[1.750] –	[2.100]	[2.320]	[0]	7.085, 2.650
2	[1.950]	[1.800] –	[2.350]	[2.400]	[0]	5.725, 3.690
3	[1.850]	[1.720] 3.510, 1.170	[2.190]	[2.300]	[0]	5.910, 3.185
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

Sumber	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Toko *Dummy* (5)	Penawaran
1	[1.920] 2.335, –	[1.750] –	[2.100] 3.510, 1.300	[2.320] 1.240, 975	[0] –, 375	7.085, 2.650
2	[1.950] –	[1.800] –	[2.350] –	[2.400] 1.880, –	[0] 3.845, 3.690	5.725, 3.690
3	[1.850] 2.400, 1.560	[1.720] 3.510, 1.170	[2.190] –	[2.300] –, 455	[0] –	5.910, 3.185
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

2. Karena permintaan produk 1 (telur) dan produk 2 (beras) pada toko 2 telah terpenuhi, selanjutnya dialokasikan pada biaya minimum berikutnya, yaitu x_{31}.

Kedua produk dialokasikan dengan $x_{1,31}$ = min(5.910-3.510, 4.735) dan $x_{2,31}$ = min(3.185-1.170, 1.560) sehingga x_{31} = 2.400, 1.560;

3. Kemudian, alokasikan pada x_{11} dengan $x_{1,11}$ = min(7.085, 4.735-2.400) dan permintaan produk 2 pada toko 1 telah terpenuhi sehingga x_{11} = 2.335, -:
4. Alokasikan pada x_{13} karena permintaan kedua produk toko 1 telah terpenuh dengan $x_{1,13}$ = min(7.085-2.335, 3.510) dan $x_{2,13}$ = min(2.650, 1.300) sehingga x_{13} = 3.510, 1.300;
5. Selanjutnya, alokasikan pada x_{34} karena permintaan toko 3 telah terpenuh dengan $x_{2,34}$ = min(3.185-1.560-1.170, 1.430) dan penawaran produk 1 pada sumber 3 telah terpenuhi sehingga x_{34} = -, 455;
6. Alokasikan pada x_{14} dengan $x_{1,14}$ = min(7.085-2.335-3.510, 3.120) dan $x_{2,14}$ = min(2.650-1.300, 1.430-455) sehingga x_{14} = 1.240, 975;
7. Karena permintaan produk 1 pada toko 4 belum terpenuhi, maka alokasikan x_{24} dengan $x_{1,24}$ = min(5.725, 3.120-1.240) sehingga x_{24} = 1.880, -;
8. Penawaran produk 2 pada sumber 1 belum terpenuhi, maka kekurangannya dialokasikan pada toko 5 sehingga x_{15} = -, 375 dan penawaran kedua produk pada sumber 2 belum terpenuhi, maka kekurangannya dialokasikan pada toko 5 sehingga x_{25} = 3.845, 3.690. Biaya pengirimannya adalah:

$$
\begin{aligned}
Z = {} & [(3.510 \times 1.720) + (2.400 \times 1.850) + (2.335 \times 1.920) + (3.510 \times 2.100) \\
& + (1.240 \times 2.320) + (1.880 \times 2.400) + (3.845 \times 0)] \\
& + [(1.170 \times 1.720) + (1.560 \times 1.850) + (1.300 \times 2.100) + (455 \times 2.300) \\
& + (975 \times 2.320) + (375 \times 0) + (3.690 \times 0)] \\
= {} & 40.657.100 \text{ (dalam Rupiah)}
\end{aligned}
$$

A.3. Metode Modifikasi Aproksimasi Vogel (Amaliah *et al.*, 2016)

Metode aproksimasi Vogel dengan menghitung penalti setiap baris dan kolom kemudian baris satu dipilih karena memiliki penalti terbesar (Tabel 14).

Tabel 14. Pemecahan menggunakan metode aproksimasi Vogel kondisi I

Sumber	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Toko *Dummy* (5)	Penawaran	Penalti Baris
1	$\boxed{1.920}$	$\boxed{1.750}$ 3.510, 1.170	$\boxed{2.100}$	$\boxed{2.320}$	$\boxed{0}$	7.085, 2.650	170
2	$\boxed{1.950}$	$\boxed{1.800}$ –	$\boxed{2.350}$	$\boxed{2.400}$	$\boxed{0}$	5.725, 3.690	150
3	$\boxed{1.850}$	$\boxed{1.720}$ –	$\boxed{2.190}$	$\boxed{2.300}$	$\boxed{0}$	5.910, 3.185	130
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065		
Penalti Kolom	30	30	90	20			

Sumber	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Toko *Dummy* (5)	Penawaran	Penalti Baris
1	$\boxed{1.920}$ –	$\boxed{1.750}$ 3.510, 1.170	$\boxed{2.100}$ 3.510, 1.300	$\boxed{2.320}$ –	$\boxed{0}$ 65, 180	7.085, 2.650	170 180 220
2	$\boxed{1.950}$ 4.735, 1560	$\boxed{1.800}$ –	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	$\boxed{0}$ 990, 2.130	5.725, 3.690	150 400 50
3	$\boxed{1.850}$ –	$\boxed{1.720}$ –	$\boxed{2.190}$ –	$\boxed{2.300}$ 3.120, 1.430	$\boxed{0}$ 2.790, 1.755	5.910, 3.185	130 340 110
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065		
Penalti Kolom	30 30 –	30 – –	90 90 90	20 20 20			

Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Menghitung penalti baris dan kolom pada Tabel 14 lalu dipilih penalty terbesar. Produk-produk dialokasikan pada kotak x_{12} karena memiliki biaya terkecil pada baris satu, maka $x_{1,12}$ = min(7.085, 3.510) dan $x_{2,12}$ = min(2.650, 1.170) sehingga x_{12} = 3.510, 1.170;
2. Penalti untuk setiap baris dan kolom dihitung kembali tetapi penalti kolom kedua tidak dihitung kembali. Baris dua dipilih dan alokasikan pada x_{21}, maka

 e-ISSN 2598-9596

$x_{1,21}$ = min(5.725, 4.735) dan $x_{2,21}$ = min(3.690, 1.560) sehingga x_{21} = 4.735, 1.560. Kolom satu ditandai karena permintaan kedua produk telah terpenuhi.

3. Kemudian, penalti dihitung kembali dan baris satu dipilih dengan mengalokasikan x_{13}, maka $x_{1,13}$ = min(7.085-3.510, 3.510) dan $x_{2,13}$ = min(2.650-1.170, 1.300) sehingga x_{13} = 3.510, 1.300.
4. Selanjutnya, alokasikan pada x_{34}, maka $x_{1,34}$ = min(5.910, 3.120) dan $x_{2,34}$ = min(3.185, 1.430) sehingga x_{34} = 3.120, 1.430.
5. Penawaran sumber 1 belum terpenuhi, maka kekurangannya alokasikan pada toko 5 sehingga x_{15} = 65, 180. Penawaran sumber 2 belum terpenuhi, maka kekurangannya dialokasikan pada toko 5 sehingga x_{25} = 990, 2.130 dan penawaran sumber 3 belum terpenuhi, maka kekurangannya dialokasikan pada toko 5 sehingga x_{35} = 2.790, 1.755. Biaya pengirimannya:

$$
\begin{aligned}
Z &= (3.510 \times 1.750) + (4.735 \times 1.950) + (3.510 \times 2.100) + (3.120 \times 2.300) \\
&\quad + (65 \times 0) + (990 \times 0) + (2.790 \times 0)] \\
&\quad + (1.170 \times 1.750) + (1.560 \times 1.950) + (1.300 \times 2.100) + (1.430 \times 2.300) \\
&\quad + (180 \times 0) + (2.130 \times 0) + (1.755 \times 0)] \\
&= 41.031.250 \text{ (dalam Rupiah)}
\end{aligned}
$$

B. Solusi Optimum

Dari ketiga metode untuk mencari pemecahan awal yang layak, metode biaya minimum menghasilkan biaya pengiriman yang terendah, sehingga dipilih untuk digunakan dalam mencari solusi optimum dengan melakukan perbaikan. Solusi optimum untuk masalah transportasi lebih dari satu jenis produk dilakukan dengan metode batu loncatan dan metode MODI yang dimodifikasi.

B.1. Metode Modifikasi Batu Loncatan

Metode batu loncatan dengan membuat suatu putaran tertutup untuk setiap variabel tak-dasar dari hasil pemecahan awal yang telah diperoleh menggunakan biaya minimum (Tabel 15 dan Tabel 16)). Variabel dasar untuk produk 1 adalah $x_{1,11}$, $x_{1,13}$, $x_{1,14}$, $x_{1,24}$, $x_{1,25}$, $x_{1,31}$, $x_{1,32}$. Variabel dasar untuk produk 2 adalah $x_{2,13}$, $x_{2,14}$, $x_{2,15}$, $x_{2,25}$, $x_{2,31}$, $x_{2,32}$, $x_{2,34}$.

Tabel 15. Pemecahan menggunakan batu loncatan kondisi I (Iterasi 1)

Sumber	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Toko *Dummy* (5)	Penawaran
1	$\boxed{1.920}$ –	$\boxed{1.750}$ 455, –	$\boxed{2.100}$ 3.510, 1.300	$\boxed{2.320}$ 3.120, 975	$\boxed{0}$ –, 375	7.085, 2.650
2	$\boxed{1.950}$ –	$\boxed{1.800}$ 1.880,–	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	$\boxed{0}$ 3.845, 3.690	5.725, 3.690
3	$\boxed{1.850}$ 4.735, 1.560	$\boxed{1.720}$ 1.175, 1.170	$\boxed{2.190}$ –	$\boxed{2.300}$ –, 455	$\boxed{0}$ –	5.910, 3.185
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

Tabel 16. Pemecahan menggunakan batu loncatan kondisi I (Iterasi 2)

Sumber	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Toko *Dummy* (5)	Penawaran
1	$\boxed{1.920}$ –	$\boxed{1.750}$ 455, –	$\boxed{2.100}$ 3.510, 1.300	$\boxed{2.320}$ 3.120, 975	$\boxed{0}$ –, 375	7.085, 2.650
2	$\boxed{1.950}$ –	$\boxed{1.800}$ 1.880,–	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	$\boxed{0}$ 3.845, 3.690	5.725, 3.690
3	$\boxed{1.850}$ 4.735, 1.560	$\boxed{1.720}$ 1.175, 1.170	$\boxed{2.190}$ –	$\boxed{2.300}$ –, 455	$\boxed{0}$ –	5.910, 3.185
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Variabel tak-dasar kedua produk dievaluasi dengan membuat *loop* tertutup:

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{1,12} &= c_{1,12} - c_{1,11} + c_{1,31} - c_{1,32} &&= -40 \\
\bar{c}_{1,15} &= c_{1,15} - c_{1,14} + c_{1,24} - c_{1,25} &&= 80 \\
\bar{c}_{1,21} &= c_{1,21} - c_{1,11} + c_{1,14} - c_{1,24} &&= -50 \\
\bar{c}_{1,22} &= c_{1,22} - c_{1,32} + c_{1,31} - c_{1,11} + c_{1,14} - c_{1,24} &&= -70 \\
\bar{c}_{1,23} &= c_{1,23} - c_{1,13} + c_{1,14} - c_{1,24} &&= 170 \\
\bar{c}_{1,33} &= c_{1,33} - c_{1,13} + c_{1,11} - c_{1,31} &&= 160 \\
\bar{c}_{1,34} &= c_{1,34} - c_{1,14} + c_{1,11} - c_{1,31} &&= 50 \\
\bar{c}_{1,35} &= c_{1,35} - c_{1,31} + c_{1,11} - c_{1,14} + c_{1,24} - c_{1,25} &&= 150 \\
\bar{c}_{2,11} &= c_{2,11} - c_{2,14} + c_{2,34} - c_{2,31} &&= 50 \\
\bar{c}_{2,12} &= c_{2,12} - c_{2,32} + c_{2,34} - c_{2,14} &&= 10 \\
\bar{c}_{2,21} &= c_{2,21} - c_{2,31} + c_{2,34} - c_{2,14} + c_{2,15} - c_{2,25} &&= 80 \\
\bar{c}_{2,22} &= c_{2,22} - c_{2,32} + c_{2,34} - c_{2,14} + c_{2,15} - c_{2,25} &&= 60 \\
\bar{c}_{2,23} &= c_{2,23} - c_{2,13} + c_{2,15} - c_{2,25} &&= 250 \\
\bar{c}_{2,24} &= c_{2,24} - c_{2,14} + c_{2,15} - c_{2,25} &&= 80 \\
\bar{c}_{2,33} &= c_{2,33} - c_{2,13} + c_{2,14} - c_{2,34} &&= 360 \\
\bar{c}_{2,35} &= c_{2,35} - c_{2,15} + c_{2,14} - c_{2,34} &&= 20
\end{aligned}
$$

2. $x_{1,22}$ memiliki perubahan negatif terbesar sehingga dipilih sebagai variabel masuk. Unit yang dialokasikan sesuai dengan jalur tertutup sehingga $x_{1,22}$ = min($x_{1,32}$, $x_{1,11}$, $x_{1,24}$) = 1.880 sehingga $x_{1,24}$ dipilih sebagai variabel keluar;
3. Kemudian, setiap variabel tak-dasar dievaluasi kembali. Variabel tak-dasar produk 2 tidak dievaluasi kembali karena semua perubahan biayanya sudah positif sehingga hanya variabel tak-dasar produk 1 yang dievaluasi;

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
\bar{c}_{1,12} & = & c_{1,12} & - & c_{1,11} & + & c_{1,31} & - & c_{1,32} & & & & & = -40 \\
\bar{c}_{1,15} & = & c_{1,15} & - & c_{1,11} & + & c_{1,31} & - & c_{1,32} & + & c_{1,22} & - & c_{1,25} & = 10 \\
\bar{c}_{1,21} & = & c_{1,21} & - & c_{1,22} & + & c_{1,32} & - & c_{1,31} & & & & & = 20 \\
\bar{c}_{1,23} & = & c_{1,23} & - & c_{1,22} & + & c_{1,32} & - & c_{1,31} & + & c_{1,11} & - & c_{1,13} & = 240 \\
\bar{c}_{1,24} & = & c_{1,24} & - & c_{1,14} & + & c_{1,11} & - & c_{1,31} & + & c_{1,32} & - & c_{1,22} & = 70 \\
\bar{c}_{1,33} & = & c_{1,33} & - & c_{1,13} & + & c_{1,11} & - & c_{1,31} & & & & & = 160 \\
\bar{c}_{1,34} & = & c_{1,34} & - & c_{1,31} & + & c_{1,11} & - & c_{1,14} & & & & & = 50 \\
\bar{c}_{1,35} & = & c_{1,35} & - & c_{1,32} & + & c_{1,22} & - & c_{1,25} & & & & & = 80
\end{array}
$$

4. $x_{1,12}$ memiliki perubahan negatif terbesar sehingga dipilih sebagai variabel masuk. Unit yang dialokasikan sesuai dengan jalur tertutup sehingga $x_{1,12}$ =min($x_{1,11}$, $x_{1,32}$) = 455 sehingga $x_{1,32}$ dipilih sebagai variabel keluar;

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\bar{c}_{1,11} & = & c_{1,11} & - & c_{1,12} & + & c_{1,32} & - & c_{1,31} & = & 40 \\
\bar{c}_{1,15} & = & c_{1,15} & - & c_{1,12} & + & c_{1,22} & - & c_{1,25} & = & 50 \\
\bar{c}_{1,21} & = & c_{1,21} & - & c_{1,22} & + & c_{1,32} & - & c_{1,31} & = & 20 \\
\bar{c}_{1,23} & = & c_{1,23} & - & c_{1,22} & + & c_{1,12} & - & c_{1,13} & = & 200 \\
\bar{c}_{1,24} & = & c_{1,24} & - & c_{1,22} & + & c_{1,12} & - & c_{1,14} & = & 30 \\
\bar{c}_{1,33} & = & c_{1,33} & - & c_{1,32} & + & c_{1,11} & - & c_{1,13} & = & 290 \\
\bar{c}_{1,34} & = & c_{1,34} & - & c_{1,32} & + & c_{1,12} & - & c_{1,14} & = & 10 \\
\bar{c}_{1,35} & = & c_{1,35} & - & c_{1,32} & + & c_{1,22} & - & c_{1,25} & = & 80
\end{array}
$$

5. Solusi optimum dicapai melalui dua iterasi dan memberikan nilai perubahan biaya positif untuk semua variabel tak-dasar. Biaya pengirimannya adalah:

$$
\begin{aligned}
Z &= [(455 \times 1.750) + (3.510 \times 2.100) + (3.120 \times 2.320) + (1.880 \times 1.800) \\
&\quad + (4.735 \times 1.850) + (1.175 \times 1.720) + (3.845 \times 0)] \\
&\quad + [(1.300 \times 2.100) + (975 \times 2.320) + (1.560 \times 1.850) + (1.170 \times 1.720) \\
&\quad + (455 \times 2.300) + (375 \times 0) + (3.690 \times 0)] \\
&= 40.507.300 \text{ (dalam Rupiah)}
\end{aligned}
$$

B.2. Metode Modifikasi MODI

Metode MODI dengan menambahkan variabel $u_{p,i}$ dan $v_{p,j}$ pada Tabel transportasi (Tabel 17, Tabel 18, Tabel 19). Kemudian $u_{p,i}$ dan $v_{p,j}$ dihitung dari hasil pemecahan yang diperoleh menggunakan biaya minimum menggunakan Persamaan (2) di bawah ini.

$$u_{p,i} + v_{p,j} = c_{p,ij}, \tag{2}$$

dengan:
$u_{p,i}$: pengalokasian produk p dari sumber i
$v_{p,j}$: pengalokasian produk p ke tujuan j
$c_{p,ij}$: biaya pengiriman per unit produk p dari sumber i ke tujuan j

Nilai $u_{p,i}$ dan $v_{p,j}$ yang dicari hanya untuk variabel dasar. Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Menghitung nilai $u_{p,i}$ dan $v_{p,j}$ dengan memisalkan $u_{1,1}$ = 0 dan $u_{2,1}$ = 0;

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_{1,11} & : & u_{1,1} & + & v_{1,1} & = & 1.920 & \text{->} & v_{1,1} = 1.920 \\
x_{1,13} & : & u_{1,1} & + & v_{1,3} & = & 2.100 & \text{->} & v_{1,3} = 2.100 \\
x_{1,14} & : & u_{1,1} & + & v_{1,4} & = & 2.320 & \text{->} & v_{1,4} = 2.320 \\
x_{1,24} & : & u_{1,2} & + & v_{1,4} & = & 2.400 & \text{->} & u_{1,2} = 80 \\
x_{1,25} & : & u_{1,2} & + & v_{1,5} & = & 0 & \text{->} & v_{1,5} = -80 \\
x_{1,31} & : & u_{1,3} & + & v_{1,1} & = & 1.850 & \text{->} & u_{1,3} = -70 \\
x_{1,32} & : & u_{1,3} & + & v_{1,2} & = & 1.720 & \text{->} & v_{1,2} = 1.790 \\
x_{2,13} & : & u_{2,1} & + & v_{2,3} & = & 2.100 & \text{->} & v_{2,3} = 2.100 \\
x_{2,14} & : & u_{2,1} & + & v_{2,4} & = & 2.320 & \text{->} & v_{2,4} = 2.320 \\
x_{2,15} & : & u_{2,1} & + & v_{2,5} & = & 0 & \text{->} & v_{2,5} = 0 \\
x_{2,25} & : & u_{2,2} & + & v_{2,5} & = & 0 & \text{->} & u_{2,2} = 0 \\
x_{2,31} & : & u_{2,3} & + & v_{2,1} & = & 1.850 & \text{->} & v_{2,1} = 1.870 \\
x_{2,32} & : & u_{2,3} & + & v_{2,2} & = & 1.720 & \text{->} & v_{2,2} = 1.740 \\
x_{2,34} & : & u_{2,3} & + & v_{2,4} & = & 2.300 & \text{->} & u_{2,3} = -20
\end{array}
$$

2. Nilai perubahan biaya setiap variabel tak-dasar adalah sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
x_{1,12} & : & \bar{c}_{1,12} & = & 1.750 & - & 0 & - & 1.790 & = & -40 \\
x_{1,15} & : & \bar{c}_{1,15} & = & 0 & - & 0 & - & (-80) & = & 80 \\
x_{1,21} & : & \bar{c}_{1,21} & = & 1.950 & - & 80 & - & 1.920 & = & -50 \\
x_{1,22} & : & \bar{c}_{1,22} & = & 1.800 & - & 80 & - & 1.790 & = & -70 \\
x_{1,23} & : & \bar{c}_{1,23} & = & 2.350 & - & 80 & - & 2.100 & = & 170 \\
x_{1,33} & : & \bar{c}_{1,33} & = & 2.190 & - & (-70) & - & 2.100 & = & 160 \\
x_{1,34} & : & \bar{c}_{1,34} & = & 2.300 & - & (-70) & - & 2.320 & = & 50 \\
x_{1,35} & : & \bar{c}_{1,35} & = & 0 & - & (-70) & - & (-80) & = & 150 \\
x_{2,11} & : & \bar{c}_{2,11} & = & 1.920 & - & 0 & - & 1.870 & = & 50 \\
x_{2,12} & : & \bar{c}_{2,12} & = & 1.750 & - & 0 & - & 1.740 & = & 10 \\
x_{2,21} & : & \bar{c}_{2,21} & = & 1.950 & - & 0 & - & 1.870 & = & 80 \\
x_{2,22} & : & \bar{c}_{2,22} & = & 1.800 & - & 0 & - & 1.740 & = & 60 \\
x_{2,23} & : & \bar{c}_{2,23} & = & 2.350 & - & 0 & - & 2.100 & = & 250 \\
x_{2,24} & : & \bar{c}_{2,24} & = & 2.400 & - & 0 & - & 2.320 & = & 80 \\
x_{2,33} & : & \bar{c}_{2,33} & = & 2.190 & - & (-20) & - & 2.100 & = & 110 \\
x_{2,35} & : & \bar{c}_{2,35} & = & 0 & - & (-20) & - & 0 & = & 20
\end{array}
$$

3. Dari evaluasi biaya variabel-variabel tak-dasar, $x_{1,22}$ memiliki perubahan negatif terbesar sehingga dipilih sebagai variabel masuk. Unit yang dialokasikan sesuai dengan langkah batu loncatan sehingga $x_{1,22} = \min(x_{1,11}, x_{1,24}, x_{1,32}) = 1.880$. Kemudian, setiap variabel tak-dasar dievaluasi Kembali dengan memisalkan $u_{1,1} = 0$, tetapi variabel $u_{2,i}$ dan $v_{2,j}$ tidak dihitung kembali karena semua perubahan biaya setiap variabel tak-dasar produk 2 sudah positif;

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_{1,11} & : & u_{1,1} + v_{1,1} & = & 1.920 & \text{->} & v_{1,1} & = & 1.920 \\
x_{1,13} & : & u_{1,1} + v_{1,3} & = & 2.100 & \text{->} & v_{1,3} & = & 2.100 \\
x_{1,14} & : & u_{1,1} + v_{1,4} & = & 2.320 & \text{->} & v_{1,4} & = & 2.320 \\
x_{1,22} & : & u_{1,2} + v_{1,2} & = & 1.800 & \text{->} & u_{1,2} & = & 10 \\
x_{1,25} & : & u_{1,2} + v_{1,5} & = & 0 & \text{->} & v_{1,5} & = & -10 \\
x_{1,31} & : & u_{1,3} + v_{1,1} & = & 1.850 & \text{->} & u_{1,3} & = & -70 \\
x_{1,32} & : & u_{1,3} + v_{1,2} & = & 1.720 & \text{->} & v_{1,2} & = & 1.790
\end{array}
$$

4. Nilai perubahan biaya setiap variabel tak-dasar adalah sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
x_{1,12} & : & \bar{c}_{1,12} & = & 1.750 & - & 0 & - & 1.790 & = & -40 \\
x_{1,15} & : & \bar{c}_{1,15} & = & 0 & - & 0 & - & (-10) & = & 10 \\
x_{1,21} & : & \bar{c}_{1,21} & = & 1.950 & - & 10 & - & 1.920 & = & 20 \\
x_{1,23} & : & \bar{c}_{1,23} & = & 2.350 & - & 10 & - & 2.100 & = & 240 \\
x_{1,24} & : & \bar{c}_{1,24} & = & 2.400 & - & 10 & - & 2.320 & = & 70 \\
x_{1,33} & : & \bar{c}_{1,33} & = & 2.190 & - & (-70) & - & 2.100 & = & 160 \\
x_{1,34} & : & \bar{c}_{1,34} & = & 2.300 & - & (-70) & - & 2.320 & = & 50 \\
x_{1,35} & : & \bar{c}_{1,35} & = & 0 & - & (-70) & - & (-10) & = & 80
\end{array}
$$

Tabel 17. Pemecahan menggunakan MODI kondisi I

$v_{1.1} = 1.880$ $v_{1.2} = 1.750$ $v_{1.3} = 2.100$ $v_{1.4} = 2.320$ $v_{1.5} = -50$
$v_{2.1} = 1.870$ $v_{2.2} = 1.740$ $v_{2.3} = 2.100$ $v_{2.4} = 2.320$ $v_{2.5} = 0$

	Sumber	Toko 1	2	3	4	*Dummy* (5)	Penawaran
$u_{1,1} = 0$, $u_{2,1} = 0$	1	$\boxed{1.920}$ –	$\boxed{1.750}$ 455, –	$\boxed{2.100}$ 3.510, 1.300	$\boxed{2.320}$ 3.120, 975	$\boxed{0}$ –, 375	7.085, 2.650
$u_{1,2} = 50$, $u_{2,2} = 0$	2	$\boxed{1.950}$ –	$\boxed{1.800}$ 1.880,–	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	$\boxed{0}$ 3.845, 3.690	5.725, 3.690
$u_{1,3} = -30$, $u_{2,3} = -20$	3	$\boxed{1.850}$ 4.735, 1.560	$\boxed{1.720}$ 1.175, 1.170	$\boxed{2.190}$ –	$\boxed{2.300}$ –, 455	$\boxed{0}$ –	5.910, 3.185
	Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

Tabel 18. Pemecahan menggunakan MODI kondisi I (Iterasi 1)

$v_{1.1} = 1.920$ $v_{1.2} = 1.790$ $v_{1.3} = 2.100$ $v_{1.4} = 2.320$ $v_{1.5} = -10$
$v_{2.1} = 1.870$ $v_{2.2} = 1.740$ $v_{2.3} = 2.100$ $v_{2.4} = 2.320$ $v_{2.5} = 0$

	Sumber	Toko 1	2	3	4	*Dummy* (5)	Penawaran
$u_{1,1} = 0$, $u_{2,1} = 0$	1	$\boxed{1.920}$ 455, –	$\boxed{1.750}$ –	$\boxed{2.100}$ 3.510, 1.300	$\boxed{2.320}$ 3.120, 975	$\boxed{0}$ –, 375	7.085, 2.650
$u_{1,2} = 10$, $u_{2,2} = 0$	2	$\boxed{1.950}$ –	$\boxed{1.800}$ 1.880,–	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	$\boxed{0}$ 3.845, 3.690	5.725, 3.690
$u_{1,3} = -70$, $u_{2,3} = -20$	3	$\boxed{1.850}$ 2.400, 1.560	$\boxed{1.720}$ 1.630, 1.170	$\boxed{2.190}$ –	$\boxed{2.300}$ –, 455	$\boxed{0}$ –	5.910, 3.185
	Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

5. Dari evaluasi biaya variabel-variabel tak-dasar, $x_{1,12}$ memiliki perubahan negatif terbesar sehingga dipilih sebagai variabel masuk. Unit yang dialokasikan sesuai dengan langkah batu loncatan sehingga $x_{1,12} = \min(x_{1,11}, x_{1,32}) = 455$. Setiap variabel tak-dasar dievaluasi kembal dengan memisalkan $u_{1,1} = 0$;

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_{1,12} & : & u_{1,1} + v_{1,2} & = & 1.750 & \text{->} & v_{1,2} & = & 1.750 \\
x_{1,13} & : & u_{1,1} + v_{1,3} & = & 2.100 & \text{->} & v_{1,3} & = & 2.100 \\
x_{1,14} & : & u_{1,1} + v_{1,4} & = & 2.320 & \text{->} & v_{1,4} & = & 2.320 \\
x_{1,22} & : & u_{1,2} + v_{1,2} & = & 1.800 & \text{->} & u_{1,2} & = & 50 \\
x_{1,25} & : & u_{1,2} + v_{1,5} & = & 0 & \text{->} & v_{1,5} & = & -50 \\
x_{1,31} & : & u_{1,3} + v_{1,1} & = & 1.850 & \text{->} & u_{1,3} & = & 1.880 \\
x_{1,32} & : & u_{1,3} + v_{1,2} & = & 1.720 & \text{->} & v_{1,2} & = & -30
\end{array}
$$

6. Nilai perubahan biaya untuk setiap variabel tak-dasar adalah sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
x_{1,11} & : & \bar{c}_{1,11} & = & 1.920 & - & 0 & - & 1.880 & = & 40 \\
x_{1,15} & : & \bar{c}_{1,15} & = & 0 & - & 0 & - & (-50) & = & 50 \\
x_{1,21} & : & \bar{c}_{1,21} & = & 1.950 & - & 50 & - & 1.880 & = & 20 \\
x_{1,23} & : & \bar{c}_{1,23} & = & 2.350 & - & 50 & - & 2.100 & = & 200 \\
x_{1,24} & : & \bar{c}_{1,24} & = & 1.800 & - & 50 & - & 2.320 & = & 30 \\
x_{1,33} & : & \bar{c}_{1,33} & = & 2.190 & - & (-30) & - & 2.100 & = & 120 \\
x_{1,34} & : & \bar{c}_{1,34} & = & 2.300 & - & (-30) & - & 2.320 & = & 10 \\
x_{1,35} & : & \bar{c}_{1,35} & = & 0 & - & (-30) & - & (-50) & = & 80
\end{array}
$$

Tabel 19. Pemecahan menggunakan MODI kondisi I (Iterasi 2)

$v_{1.1} = 1.880$ $v_{1.2} = 1.750$ $v_{1.3} = 2.100$ $v_{1.4} = 2.320$ $v_{1.5} = -50$
$v_{2.1} = 1.870$ $v_{2.2} = 1.740$ $v_{2.3} = 2.100$ $v_{2.4} = 2.320$ $v_{2.5} = 0$

	Sumber	Toko 1	2	3	4	*Dummy* (5)	Penawaran
$u_{1,1} = 0$, $u_{2,1} = 0$	1	$\boxed{1.920}$ –	$\boxed{1.750}$ 455, –	$\boxed{2.100}$ 3.510, 1.300	$\boxed{2.320}$ 3.120, 975	$\boxed{0}$ –, 375	7.085, 2.650
$u_{1,2} = 50$, $u_{2,2} = 0$	2	$\boxed{1.950}$ –	$\boxed{1.800}$ 1.880,–	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	$\boxed{0}$ 3.845, 3.690	5.725, 3.690
$u_{1,3} = -30$, $u_{2,3} = -20$	3	$\boxed{1.850}$ 4.735, 1.560	$\boxed{1.720}$ 1.175, 1.170	$\boxed{2.190}$ –	$\boxed{2.300}$ –, 455	$\boxed{0}$ –	5.910, 3.185
	Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	3.845, 4.065	

7. Solusi optimum dicapai melalui dua iterasi dan memberikan nilai perubahan biaya positif untuk semua variabel tak-dasar. Biaya pengirimannya adalah:

$$
\begin{aligned}
Z = {} & [(455 \times 1.750) + (3.510 \times 2.100) + (3.120 \times 2.320) + (1.880 \times 1.800) \\
& + (4.735 \times 1.850) + (1.175 \times 1.720) + (3.845 \times 0)] \\
& + [(1.300 \times 2.100) + (975 \times 2.320) + (1.560 \times 1.850) + (1.170 \times 1.720) \\
& + (455 \times 2.300) + (375 \times 0) + (3.690 \times 0)] \\
= {} & 40.507.300 \text{ (dalam Rupiah)}
\end{aligned}
$$

 e-ISSN 2598-9596

Berikut adalah hasil optimasi untuk masalah transportasi lebih dari satu produk dar bulan Juli hingga Desember 2019.

Tabel 20. Optimasi masalah transportasi lebih dari satu produk

Bulan	Prediksi	Aktual	Galat
Juli	40.039.670	40.507.300	1.15443
Agustus	39.698.480	39.671.200	0.06877
September	39.083.170	39.774.250	1.73751
Oktober	39.050.920	38.855.950	0.50178
November	38.968.050	38.277.250	1.80473
Desember	38.963.870	38.619.050	0.89288

Hasil solusi optimum diperoleh dari perhitungan menggunakan masalah transportasi lebih dari satu produk dengan mencari pemecahan awal yang layak kemudian dilakukan perbaikan sampai semua nilai perubahan biaya positif (Tabel 20). Hasil optimasi biaya pengiriman antara biaya aktual dan biaya prediksi tidak berbeda jauh. Perbedaan biaya pengiriman keduanya disebabkan adanya perbedaan peramalan permintaan setiap produk sehingga mempengaruhi biaya pengiriman.

Kondisi II

Model masalah transportasi dalam kondisi II adalah sumber 1 dan 2 memproduksi telur (produk 1) dan sumber 3 memproduksi beras (produk 2), seperti terlihat pada Tabel 21 dan Tabel 22.

A. Penyelesaian Awal yang Layak

Dengan menggunakan cara yang sama dengan kondisi I, didapatkan harga sebagai berikut untuk kondisi II:

1. Menggunakan metode modifikasi sudut barat laut menghasilkan biaya pengiriman sebesar Rp 31.967.050,-.
2. Menggunakan metode modifikasi biaya minimum menghasilkan biaya pengiriman sebesar Rp 31.943.850,-.
3. Menggunakan metode modifikasi aproksimasi vogel menghasilkan biaya pengiriman sebesar Rp 32.251.300,-.

Tabel 21. Masalah transportasi pendistribusian telur dan beras II seimbang

Sumber	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Penawaran
1	$\boxed{1.920}$ –	$\boxed{1.750}$ 2.455, –	$\boxed{2.100}$ 3.510, –	$\boxed{2.320}$ 1.055, –	7.085, –
2	$\boxed{1.950}$ 4.735, –	$\boxed{1.800}$ 990, –	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	5.725, –
3	$\boxed{1.850}$ –, 1.560	$\boxed{1.720}$ –, 1.170	$\boxed{2.190}$ –, 455	$\boxed{2.300}$ –	–, 3.185
Dummy (4)	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ 2.065, –	2.065, –
Dummy (5)	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –, 845	$\boxed{0}$ –, 1.430	–, 2.275
Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	

Tabel 22. Pemecahan menggunakan MODI kondisi II

$v_{1,1} = 1.900$ $v_{1,2} = 1.750$ $v_{1,3} = 2.100$ $v_{1,4} = 2.320$
$v_{2,1} = 1.850$ $v_{2,2} = 1.720$ $v_{2,3} = 2.190$ $v_{2,4} = -110$

	Sumber	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Penawaran
$u_{1,1} = 0$	1	$\boxed{1.920}$ –	$\boxed{1.750}$ 2.455, –	$\boxed{2.100}$ 3.510, –	$\boxed{2.320}$ 1.055, –	7.085, –
$u_{1,2} = 50$	2	$\boxed{1.950}$ 4.735, –	$\boxed{1.800}$ 990, –	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	5.725, –
$u_{2,3} = 0$	3	$\boxed{1.850}$ –, 1.560	$\boxed{1.720}$ –, 1.170	$\boxed{2.190}$ –, 455	$\boxed{2.300}$ –	–, 3.185
$u_{1,4} = -2.320$	Dummy (4)	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ 2.065, –	2.065, –
$u_{2,5} = 110$	Dummy (5)	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –, 845	$\boxed{0}$ –, 1.430	–, 2.275
	Permintaan	4.735, 1.560	3.510, 1.170	3.510, 1.300	3.120, 1.430	

B. Solusi Optimum

Dari ketiga metode untuk mencari pemecahan awal yang layak, metode biaya minimum menghasilkan biaya pengiriman yang terendah, sehingga dipilih untuk digunakan dalam mencari solusi optimum dengan melakukan perbaikan.

1. Dengan metode modifikasi batu loncatan, solusi optimum dicapai melalui tiga iterasi dan menghasilkan

biaya pengiriman sebesar Rp 31.024.950,-.

2. Dengan metode modifikasi MODI, solusi optimum dicapai melalui tiga iterasi dan menghasilkan biaya pengiriman sebesar Rp 31.024.950,-.

Kondisi III

Model masalah transportasi dalam kondisi III adalah sumber 1 dan 2 memproduksi telur (produk 1) dan sumber 3 memproduksi beras (produk 2) serta toko 1 dan 2 memiliki permintaan produk 1 dan toko 3 dan 4 memiliki permintaan produk 2.

A. Penyelesaian Awal yang Layak

1. Menggunakan metode modifikasi sudut barat laut menghasilkan biaya pengiriman sebesar Rp 21.427.700,-.
2. Menggunakan metode modifikasi biaya minimum menghasilkan biaya pengiriman sebesar Rp 21.404.500,-.
3. Menggunakan metode modifikasi aproksimasi vogel menghasilkan biaya pengiriman sebesar Rp 21.511.750,-.

B. Solusi Optimum

Dari ketiga metode untuk mencari pemecahan awal yang layak, metode biaya minimum menghasilkan biaya pengiriman yang terendah, sehingga dipilih untuk digunakan dalam mencari solusi optimum dengan melakukan perbaikan.

1. Dengan metode modifikasi batu loncatan, nilai perubahan biaya untuk semua variabel tak-dasar produk 1 telah positif sehingga, solusi optimum telah dicapai tanpa melakukan perbaikan pada hasil yang diperoleh dari pemecahan awal yang layak, yaitu biaya minimum (Tabel 23). Oleh karena itu, biaya pengiriman menggunakan metode biaya minimum telah optimum, yaitu Rp 21.404.500,-.

Tabel 23. Pemecahan menggunakan metode batu loncatan kondisi III

Sumber	Toko						Penawaran
	1	2	3	4	*Dummy* (5)	*Dummy* (6)	
1	$\boxed{1.920}$ 3.575, –	$\boxed{1.750}$ 3.510, –	$\boxed{2.100}$ –	$\boxed{2.320}$ –	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	7.085, –
2	$\boxed{1.950}$ 1.160, –	$\boxed{1.800}$ –	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	$\boxed{0}$ 4.565, –	$\boxed{0}$ –	5.725, –
3	$\boxed{1.850}$ –	$\boxed{1.720}$ –	$\boxed{2.190}$ –, 1.300	$\boxed{2.300}$ –, 1.430	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –, 455	–, 3.185
Permintaan	4.735, –	3.510, –	–, 1.300	–, 1.430	4.565, –	–, 455	

2. Dengan metode modifikasi MODI, nilai perubahan biaya untuk semua variabel tak-dasar produk 1 telah positif sehingga, solusi optimum telah dicapai tanpa melakukan perbaikan pada hasil yang diperoleh dari pemecahan awal yang layak menggunakan metode biaya minimum, yaitu Rp 21.404.500,- (Tabel 24).
3.

Tabel 24. Pemecahan menggunakan MODI kondisi III

		$v_{1,1} = 1.920$	$v_{1,2} = 1.720$	$v_{2,3} = 2.190$	$v_{2,4} = 2.300$	$v_{1,5} = 760$	$v_{2,6} = 0$	
	Sumber	Toko						Penawaran
		1	2	3	4	*Dummy* (5)	*Dummy* (6)	
$u_{1,1} = 0$	1	$\boxed{1.920}$ 3.575, –	$\boxed{1.750}$ 3.510, –	$\boxed{2.100}$ –	$\boxed{2.320}$ –	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –	7.085, –
$u_{1,2} = -760$	2	$\boxed{1.950}$ 1.160, –	$\boxed{1.800}$ –	$\boxed{2.350}$ –	$\boxed{2.400}$ –	$\boxed{0}$ 4.565, –	$\boxed{0}$ –	5.725, –
$u_{2,3} = 0$	3	$\boxed{1.850}$ –	$\boxed{1.720}$ –	$\boxed{2.190}$ –, 1.300	$\boxed{2.300}$ –, 1.430	$\boxed{0}$ –	$\boxed{0}$ –, 455	–, 3.185
	Permintaan	4.735, –	3.510, –	–, 1.300	–, 1.430	4.565, –	–, 455	

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan:

1) Model masalah transportasi untuk lebih dari satu produk ditunjukkan pada

Persamaan (1). Model ini merupakan modifikasi dari model masalah transportasi pada umumnya.

2) Peramalan permintaan dilakukan dengan proses *time series* kemudian dilakukan optimasi dengan model masalah transportasi untuk lebih dari satu produk.
3) Dalam penelitian ini, model masalah transportasi dimodifikasi agar dapat menyelesaikan masalah transportasi lebih dari satu produk dalam tiga kondisi dan menghasilkan biaya pengiriman yang optimum:
   a) Berdasarkan pemecahan awal yang layak pada kondisi I, diperoleh biaya pengiriman terendah menggunakan metode biaya minimum yang dimodifikasi sebesar Rp 40.657.100,-. Selanjutnya, dilakukan perhitungan menggunakan metode batu loncatan dan MODI yang dimodifikasi sehingga menghasilkan biaya pengiriman yang optimum sebesar Rp. 40.507.300,-.
   b) Berdasarkan pemecahan awal yang layak pada kondisi II, diperoleh biaya pengiriman terendah menggunakan metode biaya minimum yang dimodifikasi sebesar Rp 31.943.850,-. Selanjutnya, dilakukan perhitungan menggunakan metode batu loncatan dan MODI yang dimodifikasi sehingga menghasilkan biaya pengiriman yang optimum sebesar Rp. 31.024.950,-.
   c) Berdasarkan pemecahan awal yang layak pada kondisi III, diperoleh biaya pengiriman terendah menggunakan metode biaya minimum yang dimodifikasi sebesar Rp 21.404.500,-. Selanjutnya, dilakukan perhitungan menggunakan metode batu loncatan dan MODI yang dimodifikasi dan menghasilkan biaya pengiriman yang sama sehingga hasil menggunakan metode biaya minimum yang dimodifikasi telah optimum sebesar Rp. 21.404.500,-.

SARAN

Model dalam penelitian ini masih dapat dikembangkan untuk lebih mendekati keadaan yang dapat terjadi. Berikut adalah beberapa hal yang dapat dikembangkan lebih lanjut:

1) Pengembangan model masalah transportasi lebih dari satu produk dapat dilakukan pada kasus perusahaan menggunakan perantara untuk mendistribusikan produk. Sehingga, perlu menghitung biaya pengiriman dari perusahaan produksi ke

perusahaan distribusi yang nantinya akan mendistribusikan produk ke konsumen.

2) Dapat dikembangkan model masalah transportasi dengan mempertimbangkan faktor jarak antara sumber ke tujuan untuk meminimalkan biaya pengiriman.

DAFTAR PUSTAKA

Amaliah, B., Krisdanto, A., & Perwita, A. D. (2016). Metode max min Vogel's approximation method untuk menemukan biaya minimal pada permasalahan transportasi. *Proceeding Seminar Nasional Manjemen Teknologi XXIV*. Program Studi MMT-ITS Surabaya.

Aqidawati, E. F., Rahadian, N., Haqqoni, Z., Yuniaristanto, & Sutopo, W. (2017). Optimasi distribusi semen PT. XYZ dengan modifikasi model transportasi. *Jurnal Rekayasa Sistem & Industri*, 4(2), 187-191. https://doi.org/10.25124/jrsi.v4i02.288

Blocher, E., Stouth, D., Juras, P., & Cokins, G. (2013). Cost Management (6th ed.). McGraw-Hill Company.

Kotler, P., & Keller, K. L. (2016). Marketing Management (15th ed.). Pearson Education, Inc.

Mulyono, S. (2007). Riset Operasi. Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta.

Sitorus, V. B., Wahyuningsih, S., & Hayati, M. N. (2017). Peramalan dengan metode seasonal autoregressive integrated moving average (SARIMA) di bidang ekonomi (studi kasus: inflasi Indonesia). Eksponensial, 8(1), 17-26.